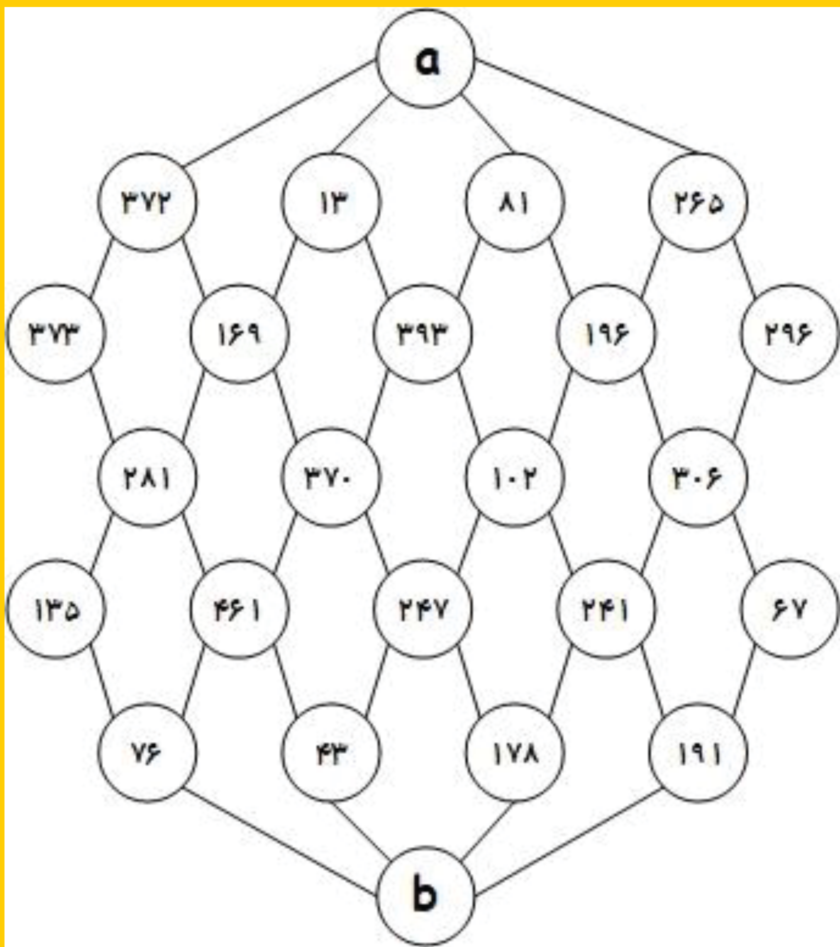
ریاضیات محاسبه‌ای

پرویز شهریاری

جلد پنجم

(سال سوم دبیرستان - ریاضی فیزیک و تجربی)

نظام جدید آموزشی



قابل استفاده:

۱. دانش‌آموزان دوره دبیرستان (نظام جدید)؛

۲. همه کسانی که می‌خواهند ریاضیات را پیش خود یاد بگیرند؛

۳. همه داوطلبان کنکورها و المپیادها.

پرویز شهریاری

ریاضیات محاسبه‌ای ۵

(سال سوّم، ریاضی فیزیک و تجربی)

نظام جدید آموزشی

تهران ـ ۱۳۷۶

خیابان دانشگاه ـ کوچهٔ میترا ـ شمارهٔ ۷   تلفن ۶۴۱۸۸۳۹ ـ ۶۴۶۹۹۶۵

ریاضیات محاسبه‌ای (جلد پنجم)

پرویز شهریاری

چاپ اول: ۱۳۷۶ ـ تهران

تیراژ: ۳۰۰۰ نسخه

چاپخانه رامین

شابک ۴ ـ ۲۵ ـ ۵۵۰۹ ـ ۹۶۴   ISBN 964 - 5509 - 25 - 4

۱۶۰۰ تومان

فهرست

پیش از آغاز

چرا باید ریاضیات را یاد گرفت؟ می‌گویند، ریاضیات به‌ذهن آدمی نظم می‌بخشد و نیروی ذهنی را گسترش می‌دهد. این البته، مبالغه‌ای آشکار است، ولی حقیقتی نیز در آن نهفته است. کسی که با ریاضیات سروکار دارد و اندوخته‌ای از روش‌های ریاضی را با خود دارد، به‌طور طبیعی، و گاهی ناخودآگاه، در هر گام و هر عمل خود، از روش‌های اندیشیدن ریاضی استفاده می‌کند.

این داوری درست دربارهٔ ریاضیات، از گ. **فریدنتال**، ریاضی‌دان نام‌دار هلندی است. او همان کسی است که چند دهه پیش، «اینکوس» را پیشنهاد کرد ـ زبانی برای تماس با ساکنان احتمالی سیاره‌ها و ستارگان دیگر. این «زبان» به ما امکان می‌دهد تا «گفت‌وگویی» یک‌جانبه با موجودهای اندیشمندی داشته‌باشیم که با هیچ‌کدام از زبان‌های زمینی آشنایی ندارند و چیزی دربارهٔ زندگی زمینی ما نمی‌دانند. البته نباید چشم‌به‌راه پرسش یا پاسخی از راه گیرندهٔ احتمالی پیام‌ها بود، چراکه رفت و برگشت پیام‌های رادیویی، چه‌بسا چند سده به درازا بکشد و به «زندگی کوتاه ما» دست ندهد.

آدم باید به‌صورتی عالی بر منطق مسلط، از تخیلی غنی برخوردار و شخصیتی والا داشته باشد؛ سخن کوتاه، به‌مفهوم واقعی و عمیق کلمه، یک ریاضی‌دان باشد تا بتواند، چنین مساله‌ای را در برابر خود قرار دهد و از عهدهٔ حل آن برآید.

حتا در این «تلاش بلندپروازانهٔ» فریدنتال ـ با آن‌که دربارهٔ «سود» آن در آیندهٔ نزدیک، نمی‌توان با خوش‌بینی اظهار نظر کرد، عنصر اساسی خدمت به انسان نهفته است.

دانش، و ازجمله ریاضیات (که به‌قول **خیام** به پیش‌گامی سزاوارتر است

و به‌قول **گوس**، سلطان همهٔ دانش‌هاست) ، در خدمت انسان است و، اگر از سوءاستفاده‌های جهان ناعادلانهٔ سرمایه‌داری بگذریم، کم‌وبیش همیشه چنین بوده است. به **ابوریحان بیرونی**، ریاضی‌دان فرزانه‌ای که هزار سال پیش می‌زیسته است، گوش کنید. او در «ماللهند» می‌نویسد:

طبیعت دل‌ها بر عشق به دانش استوار است و خمیرهٔ وجود آدمی، از ضد علم، یعنی نادانی، متنفر است . . . دانش است که طبیعت آدمی را صیقل می‌دهد و تاریکی را از درون آن می‌زداید . . .

موریس کلاین، ریاضی‌دان آلمانی سدهٔ پیش ندا درمی‌دهد:

ریاضیات، عالی‌ترین دستاورد اندیشه و اصیل‌ترین زادهٔ ذهن آدمی است. موسیقی به روح ما آرامش می‌دهد، نقاشی چشم را می‌نوازد، شعر عاطفه را برمی‌انگیزد، فلسفه ذهن را قانع می‌کند، مهندسی زندگی را بهبود می‌بخشد، ولی ریاضیات دارای مجموعهٔ همهٔ این ارزش‌هاست.

و **رژه کودسان**، استاد سابق دانشکدهٔ علوم پاریس، روشن‌تر و بهتر، وظیفهٔ ریاضیات و ریاضی‌دان را معین می‌کند:

نخستین وظیفهٔ ریاضی‌دان، ساختن و تحویل دادن چیزی است که شاید امروز کمتر کسی خواهان آن باشد، یعنی «انسان»، انسانی که می‌اندیشد، انسانی که می‌تواند درست را از نادرست تشخیص دهد، انسانی که برایش، شناخت و انتشار حقیقت، بر خیلی چیزها، ازجمله یک تلویزیون، برتری دارد، انسانی آزاد نه آدم‌واره‌ای آهنی.

□

در پایان سدهٔ بیستم، ناظر جریان‌های توفانی شگفتی‌آوری هستیم. دانش و صنعت به چنان دوری از پیشرفت افتاده است که در طول کمتر از نیم سده (که از دیدگاه تاریخی بسیار اندک است)، دگرگونی‌های عظیمی در نظام زندگی انسانی و شیوهٔ تفکر او به‌وجود آورده است. راهی که دانش در این زمان کوتاه پیموده است، برای پدران و پدربزرگان ما، حتا در طول چند سده هم، قابل تصور نبود.

یکی از این جریان‌های توفانی، عبارت است از جدی‌تر شدن نقش ریاضیات در زندگی جامعهٔ بشری و اهمیت روزافزونی که ریاضیات، در پیشرفت دانش و صنعت پیدا کرده است. این وضع درضمن، بر روابط صنعتی کشورها و گسترش این روابط، و حتا بر روابط اجتماعی انسان‌ها، اثر عمیقی گذاشته است.

تعداد رایانه‌ها و نقش آن‌ها در زندگی انسانی، روزبه‌روز افزایش می‌یابد. رایانه‌ها، نه‌تنها در انستیتوها و آزمایش‌گاه‌های علمی، بلکه در کارخانه‌ها، مرکزهای تنظیم برنامه، بانک‌ها، بیمارستان‌ها و هرجای دیگری، به خدمت گرفته شده‌اند. هر روز که می‌گذرد، وظیفه بیشتر و سنگین‌تری به‌عهدهٔ این «ماشین‌ها» گذاشته می‌شود. رایانه، نه‌تنها موجب پیشرفت پرشتاب اقتصاد و تولید شده است، که توانسته است میزان سوددهی را بی‌اندازه بالا ببرد و ملیون‌ها و بلیون‌ها «دلار» صرفه‌جویی به‌بار آورد.

بازتاب این جریان را، در خود ریاضیات هم می‌توان دید. در ریاضیات، به‌برکت امکانی که رایانه‌ها در اختیار آدمی گذاشته‌اند، شاخه‌های تازه و سمت‌گیری‌های تازه‌ای پیدا شده است، که از آن‌جمله می‌توان از ریاضیات محاسبه‌ای، نظریهٔ ریاضی هدایت و پیش‌بینی، نظریهٔ اطمینان‌بخشی، زبان‌های الگوریتمی، برنامه‌ریزی و غیر آن نام برد.

در زمان ما، ریاضیات به‌صورت جزئی جدانشدنی از صنعت درآمده است. ریاضیات، در دانش‌های تجربی، در اقتصاد، در جهت‌یابی و هدایت و پیش‌بینی، که پیش از این ریاضی‌دانان حتا شجاعت نزدیک شدن به آن را نداشتند، نفوذ کرده است. تغییر «موضع اجتماعی ریاضیات» و نقش و تاثیر روزافزونی که در زندگی جامعهٔ انسانی پیدا کرده است، دیدگاه‌های متفاوتی را برای ریاضی‌دانان به‌وجود آورده است. این اختلاف نظر، در ارزیابی موقعیت موجود ریاضیات و دورنمای تکامل آیندهٔ آن است.

کشف رایانه و تغییر تدریجی چهرهٔ ریاضیات، جمعی را به اوج شور و شوق خود رسانده است. ولی کسانی هم هستند که نه‌تنها به پیشرفت‌های عظیمی که به‌خاطر وجود رایانه نصیب دانش شده است، توجهی ندارند، که نسبت به آن با بدبینی و تردید هم می‌نگرند. اینان کسانی هستند که تنها «ریاضیات خالص» را می‌پسندند، یعنی ریاضیات را برای ریاضیات. این‌ها تنها به استدلال و ساختمان‌های منطقی، و ظرافت و زیبایی کامل این استدلال‌ها و ساختمان‌ها، ارزش می‌گذارند. اینان، همان «منزه‌طلبان» در قلمرو ریاضیات هستند.

□

حق با کدام سمت است: هواداران ریاضیات خالص یا دوست‌داران ریاضیات کاربردی؟

این پرسش تازگی ندارد و از دیرباز، ریاضی‌دانان (و هم غیرریاضی‌دانان) را به خود مشغول داشته است. می‌دانیم، دانشمندان و فیلسوفانِ «دوران زرین دانش یونانی»، تنها به ریاضیات خالص، ریاضیاتی که هیچ‌گونه «سود عملی» نداشته باشد، علاقه‌مند بودند. **افلاطون** مشاهده و آزمایش را تحقیر می‌کرد و

ارسطو (با آنکه در پیری، گرایش بیشتری به مشاهده و آزمایش پیدا کرد)، با تکیه بر استدلال‌های ذهنی و تلاش در مجرد کردن همهٔ بنیان‌های اعتقادی خود، در واقع به‌نحوی با استاد خود افلاطون، هم‌سویی داشت. فیثاغورث، ابهام را چون زشتی و ظلمت را هم‌تراز پلیدی، به بدی نسبت می‌داد و روشنی و تفسیر دقیق را چون نور، به نیکی منسوب می‌کرد و رسیدن به «روشنی و تفسیر دقیق» را تنها از راه کشف رمز و رازهای عدد ـ که پدید آورندهٔ همهٔ پدیده‌ها و فرایندهای موجود در جهان است ـ میسر می‌دانست.

آندره واروسفل (A. Warusfel)، در سخن‌رانی خود در کنگرهٔ ریاضی‌دانان در لیون فرانسه، در اوت ۱۹۶۹ (شهریور ۱۳۴۸)، علت فروپاشی دانش یونانی را، در همین مجردگرایی و انتزاع‌خواهی نمایندگان دانش یونانی می‌دانست. او گفت:

> اصل موضوع اقلیدس، محصول سالیان دراز فعالیت‌های گوناگون بشر در طول بیش از هزاروپانصد سال در زمینه‌های مساحی، کشاورزی، ساختمانی، اندازه‌گیری سطح و حجم و نمایندهٔ اوج اندیشهٔ انسانی بود. ولی گرایش ریاضی‌دانان یونان به ساختن ریاضیات مجرد و کوتاه شدن دست فیزیک‌دانان در پدید آوردن رابطه‌های لازم برای اندیشه‌های خود، دانش یونانی را از پیشرفت بازداشت.

فه‌لیکس‌کلاین، ریاضی‌دان مشهور آلمانی، در سال ۱۸۹۳ میلادی، در سخن‌رانی گشایش کنگرهٔ ریاضی‌دانان در شیکاگو، با بیان دیگری، نگرانی خود را از «تخصص‌گرایی» ریاضی‌دانان و دور شدن آنان از دانش عمومی ابراز داشت و گفت:

پیشینیان بزرگ ما، لاگرانژ و لاپلاس و گوس، به همهٔ مساله‌های ریاضیات و کاربرد آن‌ها، تسلط داشتند. کششی که در سدهٔ نوزدهم به‌سمت ویژه کاری و تخصص به‌وجود آمد، موجب کم شدن علاقهٔ ریاضی‌دانان به دانش عمومی شد. باوجود این، در دو دههٔ اخیر، تمایل به یکی کردن شاخه‌های به‌ظاهر گوناگون و دور از هم نظریه‌های ریاضی، دوباره پیدا شده است . . . با زبان مفهوم «گروه»، این امکان را به‌دست آورده‌ایم که هندسه و نظریهٔ عددها را ــ که در دورانی طولانی، هرکدام در یک مسیر یک‌بُعدی و مستقیم و با روش‌ها و مساله‌های به‌کلی متفاوت پیش می‌رفتند ــ به‌عنوان دو جنبهٔ مختلف از یک نظریه، مورد بررسی قرار دهیم.

شاید بتوان نمایندهٔ مشخص «ریاضیات خالص» زمان ما را، گروه «نیکلای بورباکی» در فرانسه دانست. این نام بیشتر یک «عنوان حقوقی» و یک «نام مستعار» است که جمعی از شایسته‌ترین ریاضی‌دانان فرانسوی را دربر گرفته است و بیش از پنجاه سال است که با ارزش‌ترین کتاب‌های نظری ریاضی را زیر همین نام و با عنوان عمومی «مقدمات ریاضی» منتشر می‌کنند.

ولی حتا این نمایندگان «جریان پوریستی و منزه‌طلبی ریاضیات» هم، اهمیت ریاضیات را، در ساختمان پرشکوه آیندهٔ جامعهٔ انسانی، نفی نمی‌کنند. «بورباکی» ریاضیات را به یک شهر تشبیه می‌کند که «ریاضیات خالص»، بخش اصلی و مرکزی آن را تشکیل می‌دهد. «بورباکی»، نقش خود را به‌عنوان ریاضی‌دان، چون معمار چیره‌دستی می‌داند که به تجدید بنای مرکز قدیمی شهر مشغول است. ضرورتی نمی‌بیند تا دربارهٔ کناره‌ها و حومه‌های شهر صحبت کند، زیرا خودِ نیاز زندگی، کوی‌ها و ساختمان‌های تازه را به‌وجود می‌آورد: «وظیفهٔ اصلی ریاضی‌دان»، تجدیدبنا و سازمان‌دهی مرکز شهری

است که ریاضیات نام دارد.

ساختمان این شهر، با دامنه‌ای گسترده و به‌وسیلهٔ افراد با استعداد بسیاری، در جریان است، ولی حتا آنان که در مرکز شهر زندگی می‌کنند، نمی‌توانند رابطهٔ خود را با تمامی دوروبر خود، به‌کلی قطع کنند. بسیاری از ریاضی‌دانان، به‌تدریج، از مرکز گذشته‌اند و به کناره‌ها رو آورده‌اند، جایی که هوا و آفتاب بیشتری است و در همان‌جا و در شهرها و کشورهای همسایه آغاز به ساختن راه‌های تازه کرده‌اند، جایی که دورنمایی گسترده‌تر، پهنه‌ای گشوده‌تر و آزادی و امکانی بیشتر، الهام‌بخش خلاقیت‌های آن‌ها شده است. به‌همین دلیل است که کناره‌ها و حومه‌ها جان می‌گیرند، محله‌هایی که با شهرهای دیگر نزدیک‌ترند و بستگی بیشتری با آن‌ها دارند، مسکونی‌تر می‌شوند: فیزیک، صنعت، اقتصاد، زیست‌شناسی، پزشکی و غیره؛ درضمن، محله‌هایی هم که به‌کلی جوان‌اند، به‌وجود می‌آید. به‌دشواری می‌توان دربارهٔ همهٔ این محله‌ها و شهرها سخن گفت، به‌ویژه که آگاهی نسبت به همهٔ آن‌ها، کار ساده‌ای نیست. شاید تنها بتوان یکی از خیابان‌ها را انتخاب کرد و دربارهٔ هوایی که ساکنان آن استنشاق می‌کنند، صحبت کرد.

وقتی دربارهٔ ریاضیات صحبت می‌شود، باید ترتیبی داد که مردم، به‌جز مرکز شهر، حومه و دور بر آن را هم ببینند. باید به مردم نشان داد، چگونه زندگی در این‌جاها هم جریان دارد و چگونه، جنگل‌های وحشی، به‌وسیلهٔ پارک‌ها و باغ‌ها عقب رانده می‌شوند! بررسی جزء‌به‌جزء آب و هوای این بخش‌های شهر، به‌ویژه برای سلامتی خود شهر، اهمیت جدی دارد.

ای. ما‌ای‌سف، از شرکت خود درکنگرهٔ ریاضی‌دانان درمسکو[1]، خاطره‌هایی

---

۱. «کنگرهٔ جهانی ریاضی‌دانان» در مسکو، از ۱۶ تا ۲۶ اوت سال ۱۹۶۶ میلادی تشکیل شد. این کنگره، یکی از باشکوه‌ترین، پرجمعیت‌ترین و پربارترین کنگره‌های ریاضی‌دانان، تا آن زمان بود. در کنگره، ۴۲۷۵ دانشمند ریاضی‌دان، از ۵۴ کشور جهان شرکت کردند و در ۱۵ گروه مختلف آن، ۱۹۵۳ مقاله خوانده شد. به‌تقریب، همهٔ ریاضی‌دانان ←

دارد که خواندنی است:

«من هم ... در کنگره ریاضی مسکو شرکت داشتم. به سخن‌رانی‌ها گوش دادم و در برخوردها وارد شدم. زمینهٔ فعالیت من در گروه‌های فیزیک ـ ریاضی، ریاضیات محاسبه‌ای، نظریهٔ احتمال و نظریهٔ ریاضی هدایت بود که به‌ترتیب شامل ۱۲، ۱۳، ۱۴ و ۱۵ نفر می‌شدند. برخی از این زمینه‌ها، نخستین بار بود که در برنامه کنگره گذاشته بودند. در این بخش‌ها، نام‌داران دانش ریاضی کم بودند، ولی درعوض، جوانی و شور و شوق از آن‌ها می‌بارید. شاید مناسب باشد، دربارهٔ برخی علت‌هایی که موجب این شور و شوق شده بود و تا به‌این اندازه جوانان را به‌سمت خود می‌کشید، اندکی بیشتر صحبت کنم.

با این‌که نظریه‌های ریاضی، به‌ویژه در زمان ما، بی‌اندازه انتزاعی به‌نظر می‌آیند، درواقع، به‌طور طبیعی و در جریان بررسی عینی ما از جهانی که در آن زندگی می‌کنیم، به‌وجود آمده‌اند. این نظریه‌ها، بخش لازمی از تصور ما را دربارهٔ طبیعت و جهان بازتاب می‌دهند. پیشرفت ریاضیات، به پیشرفت نیروهای تولیدی جامعهٔ انسانی، پیشرفت صنعت و حمل‌ونقل و پیشرفت دانش‌های نزدیک به ریاضیات، بستگی دارد. روشن است که، این بستگی، به‌اندازهٔ کافی بغرنج و پیچیده و، درضمن، غیرمستقیم است. گاهی تلاش‌های ساده‌لوحانه‌ای دیده می‌شود که سعی می‌کنند، اثبات یک قضیهٔ مشخص و یا پیدایش این یا آن نظریهٔ ریاضی را، به یک پیش‌آمد مشخص صنعتی و برای نمونه، به کشف و ساختمان فلان ماشین تازه، مربوط کنند. در ریاضیات، مساله‌ها و موضوع‌های بسیار جالبی وجود دارد که از راه قانون‌های منطقی درونی ریاضیات و به‌انگیزهٔ درونی خود ریاضیات، به‌وجود آمده‌اند. ازجملهٔ این مساله‌ها ـ که به‌انگیزه نیروهای درونی دانش ریاضی زاده شده‌اند ـ می‌توان از

مشهور، از سراسر گیتی، در آن شرکت داشتند.

آن‌هایی نام برد که، برای نمونه، گروه بورباکی در برابر خود قرار داده‌اند. آنان خود را معماران تجدیدبنای مرکز شهر می‌دانند و بنابراین، شاید گمان رود که می‌توان برای کار و فعالیت آن‌ها، ارزش چندانی قایل نشد. آنان خود ریاضیات را در برابر خود نهاده‌اند و هدف خود را، تجدیدبنای اصول و مبانی ریاضیات قرار داده‌اند؛ ولی قالب زیبای ریاضیات و پایداری و استحکام آن وقتی ظاهر می‌شود که به خدمت جامعهٔ انسانی درآید. در غیر این‌صورت، تنها توده‌ای بی‌شکل از حقیقت‌هایی پراکنده است. و همین، یکی از علت‌هایی است که زنجیر ارتباط نظریه‌های انتزاعی ریاضیات را با فعالیت‌های عملی انسان، از نظر ما دور نگه می‌دارد. ولی این بستگی را می‌توان به‌سادگی، و از میان دورنمای «مرکز شهر» تشخیص داد. به‌جز این، هر نفوذ ژرف‌تر و تازه‌تری که اندیشهٔ انسانی در صنعت و فیزیک داشته باشد، همیشه و به‌عنوان نتیجهٔ خود، انگیزه‌ای برای پیشرفت ریاضیات می‌شود. گاهی هم، نظریهٔ ریاضی لازم، از قبل وجود دارد و حاضر و آماده است (همیشه، جبههٔ فیزیک و صنعت، موجب پیشرف ریاضیات نمی‌شود، گاهی هم پیشرفت ریاضیات، موجب در هم شکستن دشواری‌های دانش‌های دیگر شده است). در چنین حالت‌هایی، کشف‌های تازهٔ فنی، انگیزه‌ای برای تکامل و شکل‌گیری شاخه‌های تازه‌ای در ریاضیات می‌شود.

در دهه‌های چهل و پنجاه سدهٔ بیستم، نخستین رایانه‌ها ساخته شد. این کشف چنان انقلابی به‌وجود آورد که، حتا امروز هم، نمی‌توان دربارهٔ همهٔ نتیجه‌های حاصل از آن، پیش‌بینی کرد. گاهی، با به‌شمار آوردن کشف انرژی هسته‌ای و ورود انسان به فضا، زمان ما را، عصر سه انقلاب می‌نامند. ولی به‌نظر من نمی‌توان اهمیت رایانه و محاسبهٔ تند الکترونی را، هم‌ارز دیگران دانست، زیرا تکامل بعدی انرژی هسته‌ای و مسافرت‌های فضایی، بدون وجود رایانه‌ها ممکن نیست. به‌جز این (و این، به‌احتمالی مهم‌تر هم باشد)، کشف رایانه، نه‌تنها صنعت، بلکه تمامی فضای فعالیت روشنفکری بشر را پر کرده

است. امروز دیگر نمی‌شود مساله‌های اقتصادی، نظامی و برنامه‌ریزی‌های دولتی را، بدون رایانه حل کرد. امروز زیست‌شناسی را هم، بدون رایانه نمی‌توان پیش برد. پرواز انسان بدون وجود رایانه ممکن نیست و . . .

رایانه، تا ژرفای وجود همهٔ زمینه‌هایی که برای ریاضیات و، به‌ویژه محاسبه، نقشی قایل است، نفوذ کرده‌است. در آغاز سال‌های پنجاه، سرعت محاسبه به‌طور متوسط، هزار برابر شد و رایانه‌ها می‌توانستند در هر ثانیه، چندهزار عمل را انجام دهند. کشف نخستین رایانه‌ها، تنها آغاز تکامل پرهیجان فضای تازهٔ فعالیت انسان بود. رایانه‌های تازه و تازه‌تری ساخته شد که هریک، نسبت به نمونهٔ قبلی خود، چه از نظر کار و چه از نظر اطمینان، بهتر بود. بعد ماشین عظیمی ساخته شد که می‌توانست یک ملیون عمل را در ثانیه انجام دهد و این خود، یک جهش در تکامل رایانه بود. وقتی عنوان «عظیم» را به این ماشین می‌دهیم، منظور قدرت آن است نه اندازه‌های آن. زیرا اندازه‌های این ماشین، چند بار از ماشین‌های قبلی هم کمتر بود. افزایش سرعت کار، با یک دشواری روبه‌رو شد: محدود بودن سرعت انتقال آگاهی‌ها از یک بلوک به بلوک دیگر، چراکه در این‌جا، مرزی برای سرعت وجود دارد. ولی اطمینان دارم که این دشواری هم در سال‌های آینده حل خواهد شد [کمااین‌که امروز حل شده است. م.].

طبیعی است که ظهور رایانه، یک رشته مساله‌های تازه را مطرح کرد و، به‌جز آن، جهت‌های تازه‌ای در ریاضیات به‌وجود آورد. حتا گاهی شنیده می‌شود که می‌گویند: با پیدایش رایانه، ریاضیات تازه‌ای پدیدار شده است. می‌گویند باید اندکی صبر کرد و دید، در آینده با پیشرفت امکان‌های رایانه‌ای، چه مسیرهای تازه و حتا روش‌های استدلالی تازه‌ای، در ریاضیات پیدا می‌شود! دلیلی وجود دارد که من تااندازه‌ای با این فکر مخالف باشم. این اندیشه، به‌ظاهر، در میان «عملی‌کاران» و کسانی که با ریاضیات کاربردی کار می‌کنند، به‌وجود آمده‌ست، ولی برخی از ریاضی‌دانان هم، آن را با رضایت تکرار

می‌کنند. اینان تاکید می‌کنند: دانش تازه‌ای که در حال تولد است، به‌ویژه، با ریاضیات بستگی مستقیم دارد.

ریاضیات، دانشی یگانه است. نمی‌توان یک ریاضیات را از میان برداشت و ریاضیات دیگری به‌جای آن نشاند. هر وقت حقیقت‌های تازه‌ای جمع شود و به مرز معینی برسد، سمت‌ها و دیدگاه‌های تازه‌ای هم به‌وجود می‌آید و، به‌تدریج، زبان تازه‌ای شکل می‌گیرد. البته، بسیاری از این روش‌ها را می‌توان از قبل پیش‌بینی کرد. همچنین هر راه و روش تازه‌ای می‌تواند منجر به ارزیابی دوباره گذشته‌ها و گاه بازسازی آن‌ها شود. ظهور آنالیز بی‌نهایت کوچک‌ها به‌موقع خود، موجب این بازبینی شد و تمامی ریاضیات را مورد ارزیابی مجدد قرار داد. ریاضی‌دانی که وقت و زندگی خود را صرف بررسی منحنی‌هایی می‌کرد که ضابطهٔ تابع آن‌ها را در اختیار داشت، اکنون می‌توانست به‌سادگی و با در دست داشتن قانون‌های حسابان، بررسی خود را تندتر و با کیفیتی بهتر انجام دهد. آن‌چه پیش از **نیوتن** و **لایب نیتس**، ریاضیات مدرن نامیده شد، یکباره کهنه شد و به‌کنار رفت.

با وجود این، مضمون عینی ریاضیاتی که در دنیای قدیم و در سده‌های میانه به‌دست آمده است، هنوز و برای ریاضیات امروزی هم، گنجینه‌ای پر ارزش و ذخیره‌ای زرین به‌شمار می‌رود. به‌نظر من، اکنون هم، مرحله‌ای را شبیه رونسانس گذشته از سر می‌گذرانیم.

ریاضیات، دانشی یک‌پارچه و یگانه است. این تنها یک ادعا نیست، بلکه درضمن، دعوت به عمل است. هر کسی که با ماشین‌های ریاضی سروکار دارد، باید به‌وسیلهٔ کسانی هدایت شود که، به‌طور حرفه‌ای، بر ریاضیات جدید تسلط دارند. ما به‌ویژه کاران زیادی نیازمندیم. باید در همهٔ مدرسه‌های عالی و دانشگاه‌ها، متخصصان محاسبه و ریاضیات کاربردی تربیت شوند. ولی در کنار آن‌ها، تربیت ریاضی‌دانان خالص (یعنی کسانی که باید به بنیان‌ها و اصل‌ها بپردازند) هم ضرورت دارد.

پیدایش رایانه، ریاضی‌دانان را واداشته است تا به همه‌سو و به همهٔ جانب‌ها، با موشکافی و دقت بیشتری بنگرند (و البته، نه‌تنها جانب‌های ریاضیات!). اگر پیش از این به محصول‌های نفتی و تولیدهای کشاورزی توجه می‌شد، امروز برای تکان خوردن و به جلو رفتن، باید به تربیت ریاضی‌دانان و به‌کار گرفتن رایانه و تسلط بر کار آن، توجه داشت . . .

. . . یک روز اقتصاددانی که ریاضی‌دان نبود، به من گفت، «حتا اگر چیز بیشتری در ریاضیات کشف نشود، ولی قادر باشیم از همین امکان‌های موجود، به‌خوبی در اقتصاد استفاده کنیم، در عمل خواهیم توانست بدون صرف سرمایه، همهٔ آن‌چه را در طول پنج سال با سرمایه‌گذاری به‌دست می‌آید، به‌دست آوریم». سخن این غیر ریاضی‌دان برای منِ ریاضی‌دان، خیلی جالب است. در واقع، به‌عنوان یک ریاضی‌دان، می‌توانم این مطلب را درک کنم که «قادر بودن به استفادهٔ کامل» کار چندان ساده‌ای نیست و، برای این منظور، سال‌ها کار دسته‌جمعیِ یک گروه نیرومند لازم است. ولی به‌هر حال، سخن درستی است و همهٔ کسانی که در معمول کردن ریاضیات در اقتصاد دخالت دارند، باید به آن توجه کنند . . .

گاهی، صرف نیروی ناچیزی برای حل یک مسالهٔ کم و بیش ساده، می‌تواند اثری جدی، برای نمونه، برای ساختن یک کارخانهٔ جدید داشته باشد. یعنی به‌جای آن‌که سرمایه و نیروی کار زیادی مصرف شود، کافی است به یک ریاضی‌دان مراجعه کنیم . . . در درجهٔ نخست، باید مساله‌های مربوط به توزیع و حمل و نقل را به‌یاد آوریم. در این‌جا، نمونه‌ای از این‌گونه مساله‌ها را می‌آوریم.

کشوری را در نظر بگیرید که در آن، هر سال بیش از ۵۰۰ ملیون تن زغال‌سنگ تولید می‌شود. این مقدار عظیم در قریب ۳۰۰ نقطهٔ کشور تولید و به قریب ۳هزار نقطهٔ کشور حمل می‌شود. باید نقشهٔ حمل و نقل را، باتوجه به همهٔ ویژگی‌ها، چنان طرح کرد که هزینه‌های لازم به کمترین مقدار خود

برسد. تنها تجربه مشکل را حل نمی‌کند و نمی‌توان برای حل چنین مساله‌ای، به تجربهٔ طولانی متوسل شد و زیان‌های ناشی از آن را تحمل کرد.

نمونه‌ای دیگر. مسیر یک کشتی اقیانوس‌پیما را در نظر بگیرید و فرض کنید، این کشتی باید نزدیک به ۱۰ روز در آب باشد. تفاوت حرکت یک کشتی با حرکت دیگری، بستگی به شرایط باد، موج، جریان‌ها و غیره دارد. گاهی پیش‌آمدهای دریایی پدید می‌آید که کشتی باید از میان آن‌ها بگذرد. با این‌که هواشناسان به‌خوبی می‌توانند شرایط کشتی‌رانی را از قبل پیش‌بینی کنند و ناخداها، امکان‌های زیادی برای هدایت درست کشتی در اختیار دارند، اگر ۱۰ ناخدا در مسیر پیش‌بینی شده حرکت کنند، ۱۰ راه‌حل مختلف به‌دست می‌آید. در حالی‌که یک رایانهٔ معمولی قدیمی، می‌تواند بهترین مسیر را با دقتی کمتر از یک دقیقه پیدا کند . . . بی‌دلیل نیست که در بعضی کشورها، سرمایه‌گذاری در ریاضیات و تولید رایانه را، خیلی پرسودتر از سرمایه‌گذاری در استخراج نفت، اورانیوم و طلا و یا تولید اتومبیل می‌دانند.

هستند کسانی که در برابر کار با رایانه، مقاومت می‌کنند یا بی‌تفاوتی نشان می‌دهند. این در درجهٔ اول ناشی از خصلت محافظه‌کاری‌شان است؛ بدون ماشین هم زندگی بد نیست، شاید بدون رایانه هم بتوان زندگی کرد. طبیعی است که در چنین حال و هوایی، کار ریاضی‌دان خوب هم دشوار می‌شود . . . درضمن، در زمینهٔ ریاضیات محاسبه‌ای و ریاضیات کاربردی هم، داوطلبی پیدا نمی‌شود.

و این، وضع خوبی نیست. **حل بد مساله، خیلی بدتر از حل نکردن آن است.**

اساسی‌ترین مساله‌ای که در این‌باره باید در نظر گرفته شود، این است: اصولی فکر کردن و متحجر نبودن؛ با احتیاط عمل کردن و محدود نکردن خود به یک راه‌حل به اصطلاح قاطع؛ سخن کوتاه، در نظر گرفتن همهٔ راه‌حل‌های ممکن منطقی. و این، تنها به‌یاری ریاضیات و مدل‌سازی ریاضی می‌تواند

تحقق یابد . . .

. . . ازجمله مساله‌هایی که در زمان ما روی آن کار می‌کنند، رابطهٔ بین انسان و ماشین است. این موضوعی است بسیار گسترده و جنبه‌های متفاوتی دارد، و من در این‌جا، به یکی از ساده‌ترینِ این جنبه‌ها می‌پردازم. راه درست استفاده از ماشین کدام است؟ چگونه باید وظیفه‌ها را برای حل یک مسالهٔ بغرنج، بین انسان و ماشین تقسیم کرد؟ . . .

باید به این نکته توجه کرد که امکان‌های ماشین، در اساس، محدود است. گاهی مساله‌ای پیدا می‌شود که کودکی چهار پنج ساله، بهتر از کامل‌ترین ماشین‌ها، می‌تواند آن را حل کند. ماشین نمی‌تواند انسان را تغییر دهد، یا حذف کند. بنابراین، استفادهٔ درست از ماشین، به این معناست که، **باید از امکان‌های ماشین و انسان، با هم استفاده کرد.** این حکم را، امروز، همگان پذیرفته‌اند. بسیاری از برنامه‌ها را انسان (نه ماشین)، آن هم با تکیه بر تجربه و درک خود و به‌یاری معرفت شهودی می‌سازد . . . باید یاد بگیریم، استعداد انسان معقول را، با کار رایانه‌های بدون اندیشه، تلفیق کنیم. تنها در این صورت است که به راه‌حل درست و «تنظیم شده» می‌رسیم. تلفیق روش‌های دقیق و انتزاعی، با «راه‌حل تنظیم شده»، یعنی تلفیق روش‌های ماشینی با درک و شهود انسان، راه اصلی موفقیت است. فرض کنیم، یک «تنظیم کننده» (انسان)، برنامه‌ای را درست کند. مسالهٔ او عبارت است از انتخاب یک حالت از بین ملیون‌ها و ملیون‌ها حالت ممکن. اگر ماشین بخواهد این تعداد بسیار زیاد حالت‌های مختلف را با هم مقایسه کند، با وجود سرعت زیادی که دارد، وقت زیادی می‌گیرد. ولی، «تنظیم‌کننده» این کار را نمی‌کند. انسان، برخلاف ماشین، راه‌های بد را خیلی زود تشخیص می‌دهد و در همان لحظه‌های نخست، آن‌ها را جدا می‌کند. او به‌تقریب تمام حالت‌هایی را که مناسب نیستند، کنار می‌زند و چند حالت مناسب را انتخاب می‌کند. این کار انسان است. کار ماشین این است که حالت‌های باقی‌مانده را با هم

مقایسه کند که، البته، این کار را خیلی سریع‌تر از انسان انجام می‌دهد. کار آخر، توضیح و تفسیر موقعیتی است که به‌عنوان نتیجه به‌دست آمده است که باز هم به‌وسیلهٔ انسان انجام می‌گیرد . . .

در بسیاری از گزارش‌های کنگره، با اصطلاح «پایداری» برخورد می‌شد. این اصطلاح را آ. **لیاپونوف** و آ. **پوانکاره** در ریاضیات وارد کرده‌اند. چند مثال ساده می‌آوریم.

در برابر شما، معمولی‌ترین ساعت دیواری قرار دارد. می‌بینید، آونگ آن، به‌صورتی موزون، حرکت می‌کند. اکنون به آونگ «کمک» کنید و آن را در جهتی که حرکت می‌کند، به جلو برانید. آونگ بیشتر از حد معمول، از خط قائم منحرف می‌شود و بعد، به عقب برمی‌گردد. در حرکت بعدی، گرچه بازهم از حد عادی تجاوز می‌کند، ولی این تجاوز، به‌اندازهٔ بار قبل نیست، و به‌زودی، آونگ به وضعی درمی‌آید که انگار کسی آرامش حرکت آن را بر هم نزده است.

نوسان‌های نوبتی آونگ، در برابر اثرهای کوچک خارجی، از خود پایداری نشان می‌دهد.

اکنون فرض کنید، در یک جادهٔ اتومبیل‌رو کمربندی باریک، اتومبیلی با سرعت کم حرکت می‌کند. آیا حرکت اتومبیل، در برابر تغییرهای کوچک وضع فرمان آن، پایدار به‌حساب می‌آید؟ برای پاسخ دادن به این پرسش، باید به چگونگی سطح زمین مجاورِ جاده هم توجه کرد. اگر جادهٔ باریک روی خاکریز ساخته شده باشد، در آن صورت، حتا کوچک‌ترین چرخش فرمان، منجر به حادثه خواهد شد. روشن‌تر از آن، حادثه وقتی اتفاق می‌افتد که مسیر از تنگه‌ای پرنشیب بگذرد: اتومبیل ممکن است با همان سرعت، به یکی از دیواره‌ها برخورد کند. ولی اگر جاده کم‌شیب باشد و در هر نقطهٔ آن بتوان به‌راحتی اتومبیل را جلو برد، در آن صورت، حتا نوسان‌های کم‌وبیش شدید فرمان هم نمی‌تواند برای مدت زیادی، ماشین را از جاده منحرف کند.

به‌محض این‌که فرمان وضع قبلی خود را به‌دست آورد، اتومبیل در مسیر اصلی خط قرار می‌گیرد.

می‌بینیم، داوری دربارهٔ برخی حرکت‌ها، تنها وقتی امکان دارد که، هم‌زمان با مسیر آن حرکت، مسیر همهٔ حرکت‌های احتمالی «مجاور» هم معلوم باشد.

در هر دو مثال، سخن از تاثیرهای بیرونی بود. ولی پاسخ به این پرسش جالب است که یک دستگاهِ تنها و جدا شده، در یک فاصلهٔ زمانی طولانی، چه رفتاری دارد؟

دستگاه‌های مجرد و تنها، در واقع وجود ندارند، ولی تاثیر پاره‌ای از عامل‌ها، اغلب چنان ناچیز است که، در مرحلهٔ معینی از پژوهش، می‌توان اهمیتی به آن‌ها نداد. چنین وضعی، روشن‌تر از همه، در اخترشناسی پیش می‌آید. اگر بخواهیم سرنوشت آیندهٔ منظومهٔ شمسی خودمان را بدانیم، پیش از هرچیز، باید به این پرسش لازم پاسخ بدهیم که: آیا درون این منظومه، چنان عامل‌هایی وجود دارد که منجر به از هم پاشیدگی آن بشود؟ به‌زبان دیگر، اگر به‌جز منظومهٔ شمسی (با حفظ قانون‌های حرکت سیاره‌ها)، چیز دیگری در جهان وجود نداشت، این منظومه چه رفتاری داشت؟

اگر تاثیر متقابل سیاره‌ها در یکدیگر را ندیده بگیریم و تنها جاذبهٔ خورشیدی را به‌حساب آوریم، به قانون‌های **کپلر** می‌رسیم. بنابراین قانون‌ها، حرکت سیاره‌ها به دور خورشید، به‌تقریب حرکتی دوره‌ای است و هرکدام دارای دورهٔ زمانی ویژه‌ای در این گردش است.

لاگرانژ توانست قانون کپلر را دقیق‌تر کند. او موفق شد، تاثیر متقابل سیاره‌ها را، نه به‌طور کامل، بلکه با مرز معینی از دقت، به‌حساب آورد. او برای این منظور، از ریاضیات و رشته‌ها یا سری‌های ویژه‌ای استفاده کرد. این رشته‌ها طوری ساخته شده بودند که در مخرج هر جمله از رشته، عامل $mw_۱ - nw_۲$ وجود داشت (که در آن، $w_۱$ و $w_۲$ دورهٔ گردش سیاره و m و n دو عدد طبیعی‌اند). لاگرانژ خود را محدود به بررسی جمله‌هایی از

رشته کرد که، برای آن‌ها، مجموع $m + n$ از ۲ تجاوز نکند. بقیهٔ جمله‌های رشته را کوچک و قابل حذف به‌حساب آورد.

ولی، این نوع عمل، قانونی نبود. درواقع، اگر $۲w_۲ = w_۱$، آن‌وقت در جمله‌ای از رشته، که برای آن ۱ $= m$ و ۲ $= n$ باشد، مخرج کسر برابر صفر می‌شود و روشن است که تاثیر چنین جمله‌ای بی‌اندازه زیاد می‌شود و ممکن است نیروی فاجعه‌آمیزی در دستگاه ایجاد کند و موجب تلاشی آن شود. همین وضع، دربارهٔ جمله‌های دیگر رشته هم می‌تواند پیش آید، به‌شرطی که نسبت دوره‌های گردش، برابر عددی گویا باشد. حتا در زمان **لاپلاس** آشکار بود، حرکت سیاره‌ها به دور خورشید، دستخوش اغتشاش‌های بزرگی می‌شود و دلیل آن این است که نسبت زمان‌های گردش مشتری و زحل، به‌تقریب برابر با عددی گویا است. مشتری در هر شبانه‌روز کمانی برابر ۱ /۲۹۹ ثانیه از مدار خود به دور خورشید و زحل کمانی برابر ۵ /۱۲۰ ثانیه از مدار خود را می‌پیماید. به‌نظر می‌رسد، دورهٔ گردش مشتری، به‌تقریب پنج برابر دورهٔ گردش زحل است و، بنابراین، برای $۵w_۲ - ۲w_۱$، مخرج کسر نزدیک به صفر می‌شود. این جمله از رشته، در فاصلهٔ دوری قرار دارد و، به‌همین مناسبت، در پژوهش‌های لاگرانژ، مورد توجه قرار نگرفته است.

به‌این ترتیب بود که مسالهٔ مخرج‌های کوچک پدید آمد، مساله‌ای که در طول دو سده، حل نشدنی باقی ماند. در اخترشناسی نمونه‌های بسیاری پیدا شد که بر تاثیر مخرج‌های کوچک تاکید می‌کردند.

بین زمین و مریخ، مدارهای نزدیک به دوهزار سیارهٔ کوچک (سیارک‌ها = آستروئیدها) قرار دارد. سیارهٔ مشتری مهم‌ترین عامل مختل کننده در حرکت سیاره‌های منظومهٔ شمسی است، زیرا جرم آن چند برابر جرم همهٔ سیاره‌های دیگر است. اخترشناسان کشف کرده‌اند، در بین سیارک‌ها، حتا یکی را نمی‌توان پیدا کرد که دورهٔ گردش آن به دور خورشید، برابر نصف یا دوسوم دورهٔ گردش مشتری باشد.

نمونهٔ شگفت‌انگیزتر، حلقه‌های زحل است. آن‌ها از توده‌های عظیم ذره‌های گوناگون تشکیل شده‌اند که به دور زحل می‌چرخند. تعداد این ذره‌ها آن‌قدر زیاد است که از زمین به‌صورت حلقه‌هایی یک‌پارچه به‌نظر می‌آید و عجیب است که در حلقه‌ها شکاف‌هایی کشف شده است، جاهای تهی که در آن‌ها، هیچ‌گونه ذره‌ای وجود ندارد. توضیح این پدیده خیلی ساده از آب درآمد. موضوع این است که زحل، به‌جز حلقه‌ها، قمرهای بزرگی دارد. اگر شکاف حلقه‌ها پر می‌بود (که بی‌شک میلیاردها سال پیش چنین بوده است)، آن‌وقت زمان گردش ذره‌های موجود در این شکاف‌ها، با زمان گردش یکی از قمرهای اصلی زحل، قابل مقایسه می‌شد و، درنتیجه، ناپایداری پدید می‌آمد.

هرچند همهٔ این پدیده‌ها، از مدت‌ها پیش شناخته شده بود، باوجود این، استدلال منطقی دربارهٔ آن‌ها، تنها در آغاز سال‌های شصت سدهٔ بیستم پیدا شد، وقتی **کولموگوروف** و **آرنولد** ریاضی‌دانان شوروی، مسالهٔ پایداری دستگاه‌های پیوستهٔ مکانیکی را حل کردند. آن‌ها ثابت کردند، اگر زمان‌های گردش در یک دستگاه، نسبت گویایی نداشته باشند، خود دستگاه پایدار است.

پرسشی پیش می‌آید: آیا می‌توان نظریهٔ «آرنولد ـ کولموگوروف» را دربارهٔ دستگاه خورشیدی به‌کار برد؟ آیا این نظریه به ما امکان می‌دهد به پرسشی که دربارهٔ پایداری منظومهٔ شمسی وجود دارد، پاسخ دهیم؛ یعنی به این پرسش که: «آیا منظومهٔ شمسی برای همیشه پایدار است؟»، یا «احتمال متلاشی شدن آن وجود دارد؟»

باید گفت که، به این پرسش، هنوز نمی‌توان پاسخی قطعی داد. تنها می‌توان گفت: اگر دستگاه‌های خورشیدی بسیاری را، که شرایط آغازیِ گوناگونی داشته‌اند، بررسی کنیم، می‌بینیم که اغلب آن‌ها پایدارند.

این‌که دستگاه‌های ناپایدار، چه سرنوشتی دارند، مساله‌ای است که تا زمان ما، حل نشده است. برای مثال، از سرنوشت سیارک‌هایی که دارای زمان

گردش قابل مقایسه با زمان گردش مشتری بوده‌اند، اطلاعی نداریم. آیا مدار خود را تغییر داده‌اند، یا برای همیشه منظومهٔ شمسی را ترک گفته‌اند؟

روش پژوهشی که در کارهای آرنولد و کولموگوروف تکمیل شده است، در زمان ما، کاربردهای زیادی پیدا کرده است. برای نمونه، به‌یاری این روش امکان ساختن به‌اصطلاح «دام پلاسمایی» پیدا شده است که می‌توان در آن، پلاسما را برای مدتی نامحدود نگه‌داری کرد . . .

گزارش آ. ب. **پوگوره‌لوف**، عضو وابستهٔ فرهنگستان علوم اتحاد شوروی، زیر عنوان «نظریهٔ هندسی پایداری پوسته‌های قابل ارتجاع» بسیار جالب بود. ویژه‌کاران این مقوله می‌دانند، مسالهٔ محاسبهٔ پوسته‌های قابل ارتجاع، به‌طور اصولی، مدت‌هاست حل شده است. ولی خود روند محاسبه، اگر کورکورانه و بدون پیش‌بینی خصلت جوابی که در انتظار آن هستیم، انجام گیرد، کاری بسیار دشوار، پرزحمت و ملال‌آور است.

این واقعیت که مهندسان، کم و بیش از پوسته‌های قابل ارتجاع، که ساختمانی پیچیده داشته باشند، صرف‌نظر می‌کنند، از همین‌جا ناشی می‌شود. پژوهش جامع و کیفی این مساله در کارهای پوگوره‌لوف داده شده است و آن زمان دور نیست که بناهای مهندسی زیبایی، که محاسبهٔ آن‌ها به‌یاری این نظریه امکان‌پذیر است، ما را احاطه کند.

پروفسور **دورام**، رئیس سابق اتحادیهٔ بین‌المللی ریاضی‌دانان و استاد دانشگاه‌های لوزان و ژنو گفت:

«شاخه‌های گوناگون ریاضیات، به‌طور دایم به هم نزدیک‌تر می‌شوند. مساله‌های بسیاری وجود دارد که، برای حل آن‌ها، باید از روش‌های نظریهٔ جبری عددها، توپولوژی و آنالیز، با هم یاری گرفت. این امر نشان می‌دهد که، در حال حاضر، باید از تخصصی شدن بیش از اندازهٔ ریاضی‌دانان پرهیز کرد».

نیکولای بورباکی، زمانی ریاضیات را با شهر بزرگی مقایسه کرد که حومهٔ

آن، به‌صورتی بی‌رویه و درهم، گسترش می‌یابد، در حالی‌که مرکز شهر، به‌طور دوره‌ای و متناوب، تغییر می‌کند. درنتیجه، همیشه باید نقشهٔ تازه‌تر و روشن‌تری از شهر تهیه کرد. محله‌های قدیمی با کوچه‌های پر پیچ‌وخم کهنه می‌شوند و باید جای خود را، به خیابان‌های مستقیم‌تر، وسیع‌تر و راحت‌تری بدهند.

اگر گفتهٔ دورام را با سخن فه‌لیکس کلاین (که در کنگرهٔ شیکاگو ایراد کرده بود) مقایسه کنیم، می‌بینیم که معماران این شهر عظیم، به همان اندازه در اندیشهٔ یک‌پارچگی ساختمانی آن هستند که دهه‌ها قبل و در زمان تشکیل کنگرهٔ شیکاگو بودند.

□

این کتاب هم با همان روش کتاب‌های قبلی «ریاضیات محاسبه‌ای» تهیه شده است. در مساله‌های آغازین، هم برخی درس‌های سال‌های گذشته (به‌ویژه آن‌ها که برای یادگیری کتاب حاضر اهمیت دارند) یادآوری شده است و هم مساله‌هایی آمده است که برای هوش‌آزمایی و آمادگی بیشتر لازم‌اند. تاکید من بر این است که همهٔ تلاش خود را برای حل مساله‌ها به‌کار برید و، سپس، وقتی مساله را حل کردید (و یا نتوانستید به‌نتیجه برسانید) به بخش حل مساله‌ها مراجعه کنید. ضمن حل مساله‌ها توضیح‌هایی داده شده است که برای تسلط بیشتر بر درس می‌توانند سودمند باشند.

در این کتاب هم، بخش‌ها یا مساله‌های دشوارتر و یا آگاهی‌های اضافی با نشانهٔ (*) مشخص شده‌اند؛ ولی این به‌معنای آن نیست که از آن‌ها صرف‌نظر کنید. هیچ مطلبی که بی‌فایده باشد، در این کتاب نیامده است.

پرویز شهریاری

تمرین‌ها

۱. ثابت کنید، اگر x و y عددهایی درست باشند، معادلهٔ $۲x^۲ - ۵y^۲ = ۷$ جواب ندارد.

۲. پنج دایره روی یک صفحه‌اند و می‌دانیم، از بین آن‌ها، هر چهار دایرهٔ دلخواه در یک نقطه مشترک‌اند، ثابت کنید نقطه‌ای وجود دارد که هر پنج دایره از آن می‌گذرند.

۳. نمودار تابع با ضابطهٔ $y = \sqrt{۹ - x^۲}$ را در صفحهٔ محورهای مختصات قائم رسم کنید.

۴. الف) نمودار تابع با ضابطهٔ $y = |x + ۲| + |x - ۱|$؛ ب) نمودار تابع با ضابطهٔ $y = x^۲ + ۴|x| - ۵$؛ ج) نمودار تابع با ضابطهٔ $y = x - \frac{|x|}{x}$ را رسم کنید.

۵. این معادلهٔ درجه دوم داده شده است:

$$m(۳x^۲ - ۲x + ۱) + n(۵x^۲ - x + ۵) = ۰$$

چه رابطه‌ای بین m و n برقرار باشد تا این معادله

۱) دو ریشهٔ برابر داشته باشد؟ ۲) در چه حالتی دست‌کم یکی از ریشه‌ها برابر صفر است؟

۳) دو ریشهٔ با علامت‌های مختلف داشته باشد؟

۴) مجموع توان‌های دوم ریشه‌ها برابر حاصل‌ضرب آن‌ها باشد؟

۶. دو نفر، اولی از نقطهٔ A و دومی از نقطهٔ B، به‌طور هم‌زمان، به‌سمت یکدیگر حرکت کردند. سرعت اولی ۲ کیلومتر کمتر از سرعت دومی در هر ساعت است. اولی وقتی به نقطهٔ B رسید که دومی یک ساعت قبل از آن به A رسیده بود. اگر فاصلهٔ از A تا B برابر ۴۰ کیلومتر باشد، سرعت هریک از این دو نفر را پیدا کنید.

۷. این معادله‌ها را حل کنید:

$$۱)\ ۶x^۴+۵x^۳-۳۸x^۲+۵x+۶=۰;$$

$$۲)\ ۶x^۴+۷x^۳-۳۶x^۲-۷x+۶=۰;$$

$$۳)\ x^۴-۲x^۳-۱۳x^۲+۱۴x+۲۴=۰;$$

$$۴)\ (x^۲+x+۱)(x^۲+x+۲)-۱۲=۰;$$

$$*۵)\ \left(\frac{x-۱}{x}\right)^۲+\left(\frac{x-۱}{x-۲}\right)^۲=\frac{۴۰}{۹}$$

$$*۶)\ \frac{\sqrt[۵]{۳+x}}{۳}+\frac{\sqrt[۵]{۳+x}}{x}=\frac{۶۴}{۳}\sqrt[۵]{x};$$

$$۷)\ (x-۳)^۲+۳x-۲۲=\sqrt{x^۲-۳x+۷};$$

$$*۸)\ (۳-x)\sqrt[۳]{\frac{۳-x}{x-۱}}+(x-۱)\sqrt[۳]{\frac{x-۱}{۳-x}}=۲;$$

$$*۹)\ \sqrt{۱۲-\frac{۱۲}{x^۲}}+\sqrt{x^۲-\frac{۱۲}{x^۲}}=x^۲$$

۸. اگر a و b و c عددهای مثبت باشند، ثابت کنید:

$$۱)\ \frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{a+c}{b}\geq ۶;$$

$$۲)\ (a+b)(b+c)(c+a)\geq ۸abc$$

۹. این معادله‌ها را حل کنید:

$$۱)\ \frac{۱}{۵-\lg x}+\frac{۲}{۱+\lg x}=۱;$$

$$۲)\ \log_{۳x}۳=\log_{x^۲}۳;$$

$$۳)\ ۳\log_{a^۲x}x+\frac{۱}{۲}\log_{\frac{x}{\sqrt{a}}}x=۲$$

۱۰. معادلهٔ ضلع‌های یک مثلث چنین‌اند:

$$(AB): x-y=۰;\ (BC): x+۲y=۵;\ (AC): ۲x-y=۳$$

۱) مساحت مثلث را پیدا کنید؛

۲) مختصات نقطهٔ برخورد سه میانه مثلث (گرانیگاه مثلث) را به‌دست آورید.

۱۱. مختصات دو انتهای قاعدهٔ بزرگتر یک ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه $(-۷, -۵)$ و $(۲, -۲)$ و مختصات انتهای چپ قاعدهٔ کوچکتر آن $(-۴, ۰)$ است. معادلهٔ هریک از ضلع‌ها و قطرهای ذوزنقه را پیدا کنید.

۱۲. یک سهمی از نقطه‌های $(-۲, ۴)$ و $(\sqrt{۳}, ۰)$ می‌گذرد. اگر محور $y'y$، محور تقارن این سهمی باشد، معادلهٔ آن را پیدا کنید.

۱۳. سهمی محوری موازی با $y'y$ دارد و از سه نقطهٔ $A\left|\begin{matrix}۱\\۶\end{matrix}\right.$، $B\left|\begin{matrix}-۵\\۰\end{matrix}\right.$ و $C\left|\begin{matrix}-۳\\-۲\end{matrix}\right.$ می‌گذرد. معادلهٔ آن را پیدا کنید.

۱۴. معادله وتری از سهمی $y=۲-x-x^۲$ را پیدا کنید که بر خط راست $x+۴y=۰$ عمود باشد و از راس سهمی بگذرد.

۱۵. دسته سهمی‌هایی با این معادلهٔ عمومی داده شده است.

$$y=(a-۳)x^۲+ax+a-۱ \qquad (۱)$$

۱) به‌ازای چه مقداری از a، سهمی (۱) محور $x'x$ را در نقطهٔ به‌طول -۱ قطع می‌کند؟ در این صورت، مختصات راس سهمی را پیدا کنید.

۲) a را طوری پیدا کنید که راس سهمی (۱) روی محور $y'y$ باشد.

۳) کدام‌یک از سهمی‌های (۱) بر خط راست $۵x-y+۴=۰$ مماس است؟ مختصات نقطهٔ تماس را پیدا کنید.

۴) برای چه مقداری از a، عرض راس سهمی (۱) برابر ۲ می‌شود؟

۵) معادلهٔ مکان هندسی راس سهمی‌های (۱) را پیدا کنید. کدام بخش از این مکان مربوط به سهمی‌هایی است که ماکزیمم دارند؟

۶) آیا سهمی‌های (۱) از نقطه یا نقطه‌های ثابتی می‌گذرند؟

۷) به‌ازای $a = ۲$، نمودار سهمی (۱) را رسم کنید، اگر قرینهٔ این سهمی را نسبت به نقطهٔ $w(۰, -۱)$ پیدا کنیم، سهمی جدید چه معادله‌ای دارد؟

* ۸) سهمی $y = -۳x^۲ + x - ۱$ به‌ازای چه مقدارهایی از a سهمی‌های (۱) را قطع می‌کند؟ اگر نقطه‌های برخورد را A و B و وسط پاره‌خط راست AB را M بنامیم، معادلهٔ مکان هندسی نقطهٔ M را به‌دست آورید.

۹) از نقطه برخورد سهمی (۱) با محور عرض، مماسی بر آن رسم کرده‌ایم. به‌ازای چه مقداری از a، این مماس محور $x'x$ را در نقطهٔ به‌طول واحد قطع می‌کند.

۱۶. معادله‌ای تشکیل دهید که دارای ریشه‌های $x_۱ = ۱$، $x_۲ = -۲$ و $x_۳ = ۳$ باشد.

۱۷. الف) می‌دانیم، مجموع بی‌نهایت جمله از تصاعد هندسی با جملهٔ اول $\frac{۱}{۲}$ و قدرنسبت $\frac{۱}{۲}$، برابر است با ۱ :

$$\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۸} + \ldots = ۱$$

کوچک‌ترین عدد n را پیدا کنید، به‌نحوی‌که مجموع

$$\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۸} + \ldots + \frac{۱}{۲^n}$$

کمتر از ۰/۰۰۱ با ۱ اختلاف داشته باشد.

ب) آیا می‌توان عدد طبیعی n را طوری پیدا کرد که، به‌ازای آن، داشته باشیم:

$$\sqrt[n]{1000} < 1/001?$$

ج) با آزمایش، عدد طبیعی n را طوری پیدا کنید که داشته باشیم:

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < 0/1$$

۱۸. نمودار هریک از این معادله‌ها را در دستگاه محورهای مختصات قائم رسم کنید (پیش از رسم این نمودارها، بند ۴ از فصل سوم را در جلد دوم «ریاضیات محاسبه‌ای» صفحه ۱۴۴ ببینید):

$$1)\ |x| + |y| = 1 \qquad 2)\ |x| - |y| = 1$$

$$3)\ |2y - 1| + |2y + 1| + 2\sqrt{2}|x| = 4$$

۱۹. نمودار $(y + \sin x)(y - \sin x) \leq 0$ را رسم کنید.

۲۰. A وارد یک شهر شد. می‌دانست مردم این شهر از دو گروه تشکیل شده‌اند، برخی همیشه راست می‌گویند و برخی همیشه دروغ. او می‌خواست یک آدم راست‌گو بیابد تا دربارهٔ شهر و مردم آن از او پرس‌وجو کند. به سه نفر B، C و D برخورد کرد. از B پرسید: ببخشید شما راست می‌گویید یا دروغ؟ از آن‌جا که پاسخ B را درست نفهمید، روبه C و D کرد و پرسید: B چه پاسخی به من داد؟ C گفت B به‌شما گفت راست می‌گوید. ولی D گفت: نه آقا، B گفت که دروغ می‌گوید.

A به چه کسی اعتماد کند؟ از سه نفر B، C و D، کدام راست‌گو و کدام دروغ‌گو است؟

۲۱. U_n را جملهٔ عمومی دنباله‌ای در نظر می‌گیریم که در آن، n عددی طبیعی است. برای مثال اگر $U_n = n^2$، آن‌وقت به این دنباله می‌رسیم:

$$1, 4, 9, 16, 25, \ldots, n^2, \ldots$$

و اگر $U_n = ۱ - \frac{۱}{n}$، آن‌وقت دنباله‌ای به‌این صورت به‌دست می‌آید:

$$۰, \frac{۱}{۲}, \frac{۲}{۳}, \frac{۳}{۴}, \frac{۴}{۵}, \ldots, ۱ - \frac{۱}{n}, \ldots$$

اکنون برای هریک از این دنباله‌ها، کوچکترین جمله را پیدا کنید:

$$۱)\ U_n = n^۲ - ۵n + ۱; \quad ۲)\ U_n = \sqrt{n^۲ - ۴n + ۱۳};$$

$$۳)\ U_n = \frac{n^۲ - n + ۱}{n^۲ + ۱}; \quad ۴)\ U_n = n + \frac{۱۰۰}{n};$$

$$۵)\ U_n = \sqrt{\frac{n^۲ + ۱}{n + ۱}}; \quad ۶)\ U_n = n + ۵\sin\frac{n\pi}{۲}$$

۲۲. این دو معادله را حل کنید:

$$۱)\ \frac{x^۲}{x^۲ + x + ۱} + \frac{x^۲ + x + ۱}{x^۲} = ۲; \quad ۲)\ \frac{x^۲ + ۱}{x - ۷} + \frac{x - ۷}{x^۲ + ۱} = -۲$$

*** ۲۳.** الف) ثابت کنید:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{۱}{۱ \times ۲} + \frac{۱}{۲ \times ۳} + \frac{۱}{۳ \times ۴} + \ldots + \frac{۱}{(n - ۱)n}\right) = ۱$$

ب) ثابت کنید:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{۱}{۱^۲} + \frac{۱}{۲^۲} + \frac{۱}{۳^۲} + \ldots + \frac{۱}{n^۲}\right) \leq ۲$$

۲۴. اگر بدانیم $f(x) = \frac{x + ۱}{x - ۱}$، مطلوب است:

$$۱)\ f(۲); \quad ۲)\ f\left(-\frac{۳}{۴}\right); \quad ۳)\ f\left(\frac{۱}{x}\right);$$

$$۴)\ f\left(\frac{۲x - ۱}{۲x + ۱}\right); \quad ۴)\ f(f(x))$$

* ۲۵. الف) سهمی $y = -x^2 + ax + b$ داده شده است. a و b را طوری پیدا کنید که: مماس بر سهمی در نقطهٔ برخورد آن با محور $y'y$ با جهت مثبت محور $x'x$ زاویه‌ای برابر ۴۵ درجه بسازد و، درضمن، خط راست عمود بر این مماس در نقطهٔ تماس آن با سهمی، از نقطهٔ برخورد سهمی با محور $x'x$ بگذرد.

ب) سهمی $y = mx^2$، به‌ازای چه مقدارهایی از m، با سهمی به معادلهٔ $y = -x^2 + x + 2$، نقطه یا نقطه‌های مشترک دارد. در حالتی که این دو سهمی، در نقطه‌های A و B یکدیگر را قطع می‌کنند، معادلهٔ مکان هندسی نقطهٔ P وسط پاره‌خط راست AB را پیدا کنید.

ج) دایره‌ای به مرکز نقطهٔ $w(4, 0)$ رسم کرده‌ایم که بر خط $x + y = 2$ مماس است. معادلهٔ دایره را بنویسید.

* ۲۶. گاوصندوق سندها، چند قفل دارد. برای هر قفل چند کلید تهیه شده است. پنج عضو کمیسیون، کلیدها را طوری بین خود تقسیم کرده‌اند که اگر سه نفر از آن‌ها (هر سه نفر دلخواه) با هم باشند، بتوانند گاوصندوق را بگشایند، ولی اگر دو نفر از آن‌ها (هر دو نفر دلخواه) با هم باشند، نتوانند گاوصندوق را باز کنند. این گاوصندوق دست‌کم چند قفل دارد؟ به‌شرطی که برای باز کردن گاوصندوق، باید کلید همهٔ قفل‌ها در دسترس باشد.

* ۲۷. دو خط راست موازی و پاره‌خط راستی واقع بر یکی از آن‌ها داده شده است. ثابت کنید، تنها به‌یاری یک خط‌کشِ بدون درجه می‌توان این پاره‌خط راست را به n بخش برابر تقسیم کرد ($n \in \mathbf{N}$، عددی است دلخواه).

* ۲۸. ترازویی دوکفه‌ای در اختیار داریم که با آن می‌توان، بدون استفاده از وزنه، دوجسم را با هم مقایسه کرد، به‌نحوی که معلوم شود کدام جسم سبک‌تر از دیگری است. تعدادی سکه به ما داده‌اند که در بین آن‌ها، یک سکهٔ تقلبی وجود دارد و می‌دانیم سکهٔ تقلبی اندکی سبک‌تر است. با n بار

استفاده از ترازو توانسته‌ایم سکهٔ تقلبی را پیدا کنیم. حداکثر چند سکه بوده است؟

* ۲۹. $f(x)$ را پیدا کنید، به‌شرطی که بدانیم

$$f(۱-x)+f\left(\frac{۱}{x}\right)=x$$

x را عددی حقیقی، غیر از دو عدد ۰ و ۱ به‌حساب آورید.

* ۳۰. ثابت کنید، با پنج مربعِ دوبه‌دو نابرابر، نمی‌تان یک مستطیل ساخت.

* ۳۱. فرهاد با A، B و C دوست است. در یکی از روزهای تعطیل تصمیم می‌گیرد از دوستانش دیدن کند. از خانه به راه می‌افتد و به‌طرف خانهٔ A می‌رود. ولی درست در وسط راه تصمیم خود را عوض می‌کند و به‌سمت خانهٔ B حرکت می‌کند. دوباره بعد از پیمودن نیمی از راه، راه خود را به‌طرف C عوض می‌کند. باز هم در وسط راه به‌طرف A، بعد در وسط راه به‌طرف B، و سپس در وسط راه تازه به‌طرف C می‌رود و غیره. اگر فرهاد، به‌همین ترتیب تصمیم خود را تغییر دهد، سرانجام به کجا می‌رسد؟

همهٔ راه‌ها را خط راست و محل زندگی A و B و C را راس‌های یک مثلث در نظر بگیرید.

۱. بررسی تابع

پیش از این (در جلد دوم «ریاضیات محاسبه‌ای» صفحه‌های ۳۹ تا ۴۶ و صفحه‌های ۱۰۱ تا ۱۱۴؛ جلد سوم «ریاضیات محاسبه‌ای»، صفحه‌های ۸۱ تا ۱۱۴) دربارهٔ مفهوم‌های بازه (یا فاصله)، تابع و دامنه و بُرد صحبت کرده‌ایم و از شما دانش‌آموز جست‌وجوگر می‌خواهیم، پیش از مطالعهٔ این بخش، برای به‌یاد آوردن، به بحث‌های گذشته مراجعه کنید تا آمادگی بیشتری برای درک مطلب داشته باشید.

§۱. تابع

آن‌چه در این‌جا می‌خوانید، با هدف یادآوری و تکمیل آموخته‌های شماست، ولی درهرحال، شما را از مراجعه و مطالعهٔ آن‌چه در جلدهای دوم و سوم «ریاضیات محاسبه‌ای» آمده است، بی‌نیاز نمی‌کند.

تعریف. مجموعهٔ A *شامل زوج‌های مرتب* (x_n, y_n) *یک تابع را معرفی می‌کند، به‌شرطی که برای هر دو زوج* $(x_۱, y_۱)$ و $(x_۲, y_۲)$ *از آن، اگر* $x_۱ = x_۲$*، آن‌وقت* $y_۱ = y_۲$. *ولی عکس این حکم لازم نیست، یعنی اگر* $y_۱ = y_۲$*، ممکن است داشته باشیم* $x_۱ \neq x_۲$. اگر X را مجموعهٔ x_nها و Y را مجموعهٔ y_nها بگیریم، آن‌وقت X را حوزهٔ **تعریف متغیر** x یا به‌طور

ساده **دامنهٔ تابع** و مجموعهٔ Y را **حوزهٔ تعریف تابع**، یا به‌طور ساده **بُرد تابع** گویند.

مجموعه‌های X و Y می‌توانند شامل هر چیزی باشند. برای نمونه، می‌توان مجموعهٔ X را شامل سیاره‌های دستگاه خورشیدی و مجموعهٔ Y را فاصلهٔ متوسط این سیاره‌ها از مرکز خورشید (برحسب کیلومتر) دانست. در این‌جا، اگر تنها سیاره‌های بزرگ را در نظر بگیریم، بین عضوهای مجموعه‌های X و Y، تناظر یک‌به‌یک برقرار است. یعنی هر سیاره با فاصلهٔ متوسط خود نسبت به خورشید مشخص می‌شود. برعکس هر فاصله‌ای متعلق به یکی از سیاره‌هاست. بنابراین $y = f(x)$ یک تابع را تعریف می‌کند، به‌شرطی که $x \in X$ و $y \in Y$.

حتا اگر سیارک‌ها را هم به‌حساب آوریم، باز هم با یک تابع سروکار داریم، زیرا هر سیاره یا سیارک، تنها با یک فاصله مشخص می‌شود، اگرچه ممکن است یک فاصله، متناظر با چند سیارک باشد. در این حالت، ممکن است داشته باشیم:

$$f(x_1) = f(x_2) = y_1$$

(سیارک‌های x_1 و x_2، به یک فاصلهٔ متوسط از خورشید هستند، یعنی به فاصلهٔ y_1)، ولی به‌شرط $y_1 \neq y_2$، بی‌شک $x_1 \neq x_2$. (یعنی دو فاصلهٔ متفاوت، مربوط به دو سیارهٔ مختلف است).

نمونهٔ دیگر: فرض کنید X، مجموعهٔ دانش‌آموزان یک کلاس و Y مجموعهٔ نام‌های کوچک آن‌ها باشد. ممکن است نام‌های کوچک دو یا چند دانش‌آموز یکی باشد، ولی اگر دو نام متفاوت را در نظر بگیریم، بدون تردید متعلق به دو دانش‌آموز مختلف است. پس در این‌جا هم با یک تابع سروکار داریم.

در ریاضیات با مجموعه‌های عددی، و در حال حاضر عددهای حقیقی،

سروکار داریم. یعنی هم X و هم Y، مجموعه‌هایی از عددهای حقیقی‌اند. بنابراین، از این به بعد، هرجا از تابع صحبت می‌کنیم، منظورمان زوج‌های مرتبی است که در آن، عنصرهای هر عضو، عددهایی حقیقی هستند.

به‌جز این، بیشتر با تابع‌هایی کار می‌کنیم که، در آن‌ها، رابطهٔ بین متغیر و تابع، با یک یا چند دستور مشخص شده باشد که، در این صورت، دستور معرفِ رابطهٔ بین متغیر و تابع را، **ضابطهٔ تابع** گویند. می‌گوییم تابع با ضابطهٔ $y = \sqrt{x}$ (که در آن $x \geq 0$ و $y \geq 0$)، یا تابع باضابطهٔ $y = \log(\cos x)$ (که در آن $\cos x > 0$ و $y \leq 0$، چرا؟).

باوجود این، برای سادگی کار، واژهٔ ضابطه را حذف می‌کنیم و می‌گوییم: تابع $y = \sqrt{x}$ یا تابع $y = \log(\cos x)$.

ولی تعریفی که امروز برای تابع پذیرفته‌ایم، به‌سادگی به‌دست نیامده است. واژهٔ «تابع» ترجمه‌ای است از واژهٔ fonction که خود از ریشهٔ لاتینی functio به‌معنای «اجرا کردن» و «انجام دادن» آمده است. بنابراین «تابع»، به‌معنای یک «عمل کننده» است که می‌تواند با در اختیار گرفتن متغیر، مقدار متناظر تابع را به‌دست آورد. وقتی می‌نویسیم $y = f(x)$ (یا $y = \varphi(x)$ و غیر آن)، f (یا φ) را نوعی روند به‌حساب می‌آوریم که، به‌کمک آن، می‌توان خود را از x به y رساند.

اگر به‌ازای هر مقدار x (از مقدارهایی که x می‌تواند اختیار کند) یک و تنها یک مقدار برای y به‌دست آید، گوییم y تابعی است از x. گاهی x را متغیر مستقل و y را متغیر وابسته (یا متغیر تابع) گویند، ولی برای سادگی بیان معمول شده است که x را متغیر و y را تابع بنامند.

هنوز نزد برخی مولفان مرسوم است که تابع را، به‌عنوان رابطه‌ای بین x و y تعریف می‌کنند. آن‌ها شکل $y = f(x)$ را **تابع صریح** و شکل $f(x, y) = 0$ را **تابع ضمنی** می‌نامند و اشکالی نمی‌بینند که به‌ازای هر مقدار x، چند(یا حتا بی‌نهایت) مقدار برای y به‌دست آید. به این مفهوم، رابطهٔ

$x^۲ + y^۲ = ۱$ یک تابع است و آن را **تابع دو ارزشی** نام نهاده‌اند، زیرا به‌ازای هر مقدار x (به‌شرط $-۱ \leq x \leq ۱$)، دو مقدار برای y به‌دست می‌آید. ولی با تعریفی که در این کتاب برای تابع کردیم، رابطهٔ $x^۲ + y^۲ = ۱$، شامل دو تابع جداگانه است:

$$y = \sqrt{۱ - x^۲} \text{ و } y = -\sqrt{۱ - x^۲}$$

§۲. مقدار حدی تابع

وقتی تابع را به‌صورت تحلیلی آن، یعنی $y = f(x)$ بیان می‌کنیم، به‌جز عمل‌های معمول (جمع، ضرب، توان، ریشگی، لگاریتم گرفتن و غیره)، گاهی لازم است، برخی مقدارهای مرزی راپیدا کنیم (به‌اصطلاح ریاضی، به‌سمت حد عبور کنیم). فرض کنید بخواهیم، مقدار تابع

$$y = \frac{x^۲ + ۷x - ۱۸}{x^۲ - ۵x + ۶} \qquad (۱)$$

را، وقتی x به‌اندازهٔ کافی به ۲ نزدیک می‌شود، محاسبه کنیم. به‌ازای $x = ۲$، مخرج کسر برابر صفر می‌شود و چون تقسیم بر صفر ممکن نیست، به‌ازای $x = ۲$ مقداری برای y به‌دست نمی‌آید. ولی اگر فرض کنیم $x \neq ۲$، یعنی $x - ۲ \neq ۰$، ولی مقدار x را خیلی نزدیک به ۲ بگیریم، حاصل کسر چه مقداری می‌شود؟ $x = ۱/۹$ می‌گیریم. برای صورت و مخرج کسر داریم:

$$x^۲ + ۷x - ۱۸ = ۳/۶۱ + ۱۳/۳ - ۱۸ = -۱/۰۹$$
$$x^۲ - ۵x + ۶ = ۳/۶۱ - ۹/۵ + ۶ = ۰/۱۱$$

و بنابراین، برای y، به‌ازای $x = ۱/۹$ به‌دست می‌آید:

$$x = ۱/۹: \quad y = -\frac{۱/۰۹}{۰/۱۱} \approx -۹/۹۰۹$$

اگر مقدار x را به ۲ نزدیک‌تر کنیم و $x = ۱/۹۹$ بگیریم:

$$y = \frac{۳/۹۶۰۱ + ۱۳/۹۳ - ۱۸}{۳/۹۶۰۱ - ۹/۹۵ + ۶} = -\frac{۰/۱۰۹۹}{۰/۰۱۰۱} \approx -۱۰/۸۸۱$$

و اگر $x = ۱/۹۹۹$ بگیریم، برای y عددی نزدیک به $-۱۰/۹۸۷$ به‌دست می‌آید.

هرچه x را به ۲ نزدیک‌تر کنیم، مقدار y به -۱۱ نزدیک‌ترمی‌شود.ولی می‌توان محاسبه را خیلی ساده‌تر انجام داد. کسر y را می‌توان این‌طور نوشت:

$$y = \frac{x^۲ + ۷x - ۱۸}{x^۲ - ۵x + ۶} = \frac{(x - ۲)(x + ۹)}{(x - ۲)(x - ۳)}$$

آیا می‌توان $x - ۲$ را از صورت و مخرج حذف کرد؟ بله! زیرا صورت و مخرج هر کسر را به هر عددی به‌جز صفر، می‌توان تقسیم کرد و بنابر فرض داریم: $x - ۲ \neq ۰$، کسر به‌صورت

$$y = \frac{x + ۹}{x - ۳}$$

درمی‌آید که به‌ازای $x = ۲$ برابر -۱۱ می‌شود. در ریاضیات، می‌نویسند:

$$\underset{x \to ۲}{\text{حد}}\, y = -۱۱$$

y به‌ازای $x = ۲$ معنا ندارد، ولی وقتی x به‌سمت ۲ میل کند (یعنی تفاوت x با ۲، بسیار کوچک و به‌اصطلاح ریاضی‌دانان، بی‌نهایت کوچک باشد) حاصل کسر، یعنی مقدار y برابر -۱۱ می‌شود.

به‌همین مناسبت است که «هانری لِه‌بِک» (Lebesgue: ۱۸۷۵_۱۹۴۱ میلادی)، ریاضی‌دان برجستهٔ فرانسوی در سال ۱۹۰۵، تابع را نتیجه‌ای از عمل‌های عادی به‌اضافه عبور به حد، تعریف کرد.

برای این تعریف له‌بک، دلیل دیگری هم وجود داشت. به‌دلیل سادگی کار در رفتار چندجمله‌ای‌ها، ریاضی‌دانان تلاش می‌کردند، عبارت‌های غیرجبری (مثل $\cos x$، $\ln x$ و، غیره) را به‌صورت مجموع جبری جمله‌هایی به‌صورت ax^n درآورند که در آن، a عددی‌حقیقی و n عددی طبیعی باشد. آن‌ها در این کار موفق شدند، ولی چندجمله‌ای‌ها، با تعداد نامحدودی جمله به‌دست می‌آید. به‌عنوان مثال، برای $\cos x$ به‌دست آمد:

$$\cos x = ۱ - \frac{x^۲}{۲!} + \frac{x^۴}{۴!} - \frac{x^۶}{۶!} + \dots$$

این رشته تا بی‌نهایت ادامه دارد و، بنابراین، می‌توان نوشت:

$$\cos x = \lim_{n\to\infty} \left[۱ - \frac{x^۲}{۲!} + \frac{x^۴}{۴!} - \dots + \frac{x^{۴n}}{(۴n)!} - \frac{x^{۴n+۲}}{(۴n+۲)!} \right]$$

ازجمله «وایرشتراس» ریاضی‌دان آلمانی در سال ۱۸۸۵ ثابت کرد که، هر تابع متناوب را می‌توان به‌صورت حدی از رشتهٔ

$$c_۰ + c_۱ x + c_۲ x^۲ + \dots + c_n x^n + \dots$$

نوشت که در آن ضریب‌ها، عددهایی حقیقی و n عددی طبیعی است.

§۳. نگاهی به تاریخ

تصور روشن دربارهٔ کمیت‌های متغیر، برای نخستین بار، در سدهٔ هجدهم و در کارهای «فرما (۱۶۰۱ـ۱۶۶۵)» و «دکارت» ریاضی‌دانان فرانسوی و در نوشته‌های هندسی آن‌ها پدید آمد. مثلاً دکارت در کتاب «هندسهٔ» خود، مفهوم تابع را (بدون آن‌که نامی از واژهٔ تابع ببرد)، به‌عنوان تغییر عرض نقطه، در بستگی با طول آن می‌دانست. «نیوتون» هم از مفهوم تابع استفاده می‌کرد. او در سال ۱۶۷۱ میلادی، تابع را به‌معنای کمیت متغیری می‌دانست که، در

جریان زمان، تغییر می‌کند. او حتا برای تابع، نامی هم در نظر گرفته بود: «فلوانت». او می‌نویسد: «. . . کمیت‌های جاری و سیال را، که به‌تدریج رو به افزایش‌اند، «فلوانت» نامیده‌ام . . . .

واژهٔ «تابع»، برای نخستین بار در سال ۱۶۹۴ میلادی و در کارهای لایب‌نیتس به‌کار رفت. او زیر عنوان «تابع»، پاره‌خط راستی را در نظر می‌گرفت که، طول آن، بنابر قانون معینی تغییر می‌کند. «ایساک باروی» (Barrow: ۱۶۳۰_۱۶۷۷ میلادی)، ریاضی‌دان، فیلسوف و فقیه انگلیسی و معلم نیوتون هم، در کتاب خود «درس‌هایی دربارهٔ هندسه» (۱۶۷۰ میلادی)، دربارهٔ بستگی کمیت‌های متغیر به یکدیگر، بحث کرده‌است.

در سدهٔ هجدهم میلادی، دیدگاه تازه‌ای دربارهٔ تابع پدید آمد و آن را به‌عنوان دستوری می‌شناختند که یک کمیت متغیر را به کمیت متغیر دیگری مربوط می‌کند. و این، دیدگاه تحلیلی نسبت به مفهوم تابع بود. این دیدگاه را برای نخستین بار، ای. برنولی (۱۶۶۷_۱۷۴۸)، ریاضی‌دان سویسی مطرح کرد. او در سال ۱۷۱۸ میلادی تابع را این‌طور تعریف کرد: «تابع یک مقدار متغیر، به کمیتی گفته می‌شود که، با روشی معین، از این متغیر و مقدارهای ثابت به‌دست آمده باشد».

«اولر» شاگرد «ای. برنولی»، در سال ۱۷۴۸ میلادی، تنظیم قطعی تعریف تابع را از دیدگاه تحلیلی، ارائه داد: «تابعِ یک مقدار متغیر، یک عبارت تحلیلی است که، با روشی معین، از این مقدار متغیر و از عددها یا کمیت‌های ثابت تشکیل شده باشد».

ریاضی‌دانان بزرگ نیمهٔ دوم سدهٔ هجدهم میلادی، مثل «لاگرانژ» (۱۷۳۶_۱۸۱۳)، «دالامبر» (۱۷۱۷_۱۷۸۳)، «فوریه» (۱۷۶۸_۱۸۳۰) و دیگران، تعریف «اولر» را پذیرفته بودند.

تعریفی از تابع که تفاوت چندانی با تعریف امروزی ندارد و تابع را، بدون این قید که، آیا می‌توان آن را با دستور یا فرمول بیان کرد یا نه، به‌وسیلهٔ

نیکلای ایوانوویچ لباچوسکی (۱۷۹۲_۱۸۵۶) ریاضی‌دان روسی داده شد (در سال ۱۸۳۴) او می‌نویسد:

«این مفهوم کلی [یعنی تابع] به این مناسبت لازم است که بتوان تابعِ x را با عددی که برای هر مقدار x به‌دست می‌آید و همراه با x، به‌تدریج تغییر می‌کند، بیان کرد. مقدار تابع ممکن است با یک دستور تحلیلی داده شده باشد، با شرطی که وجود دارد، عددها را مورد آزمایش قرار داد و یکی از آن‌ها را انتخاب کرد و یا سرانجام، چه‌بسا این بستگی وجود داشته باشد، ولی برای ما معلوم نباشد».

همین اندیشه را، دیریکله (۱۸۰۵_۱۸۵۹)، ریاضی‌دان آلمانی، روشن‌تر و دقیق‌تر بیان می‌کند (در سال ۱۸۳۷). تعریف او از تابع چنین است: «y را تابع متغیر x در بازهٔ $a \leq x \leq b$ گوییم، وقتی که هر مقدار x از این بازه، متناظر با مقدار کاملاً معینی از y باشد؛ درضمن، مهم نیست، این تناظر، با چه روشی برقرار شده است».

ریاضی‌دانان بعد از دیریکله، تا امروز، از همین تعریف استفاده می‌کنند و، در دبیرستان‌ها هم با بیان‌های متفاوت، همین تعریف را برای مفهوم تابع به‌کار می‌برند.

§۴. بررسی تابع

بررسی یک تابع، به‌معنای نشان دادن ویژگی‌های مختلف یک تابع است. ابزارهای ریاضی که برای این بررسی لازم‌اند، عبارتند از: مفهوم بازه یا فاصله، حل معادله‌ها و نامعادله‌ها، اتحادها و نابرابری‌های اتحادی که با آن‌ها آشنا هستیم. به‌یاری این ابزارهاست که می‌توان ویژگی‌های یک تابع را مشخص، یا به‌زبان ریاضی، آن را بررسی کرد.

ویژگی‌هایی از تابع که باید مورد بررسی قرار گیرد، عبارتند از: ۱) تعیین مقدارهای قابل‌قبول برای متغیر (**دامنهٔ تابع**) که به آن **حوزهٔ تعریف تابع** هم

می‌گویند؛ ۲) تعیین مقدارهای قابل قبول برای تابع (**بُرد تابع**) که به آن، **حوزهٔ تغییر تابع** هم می‌گویند؛ ۳) نقطه‌های صفر تابع؛ ۴) تعیین فاصله‌های صعودی یا نزولی بودن تابع؛ ۵) تعیین جهت‌کاوی یا کوژی؛ ۶) تعیین زوج یا فرد بودن تابع؛ ۶) دوره‌ای بودن یا نبودن تابع (تعیین دورهٔ تناوب) و غیره.

با برخی از این ویژگی‌ها و تعریف آن‌ها آشنا هستیم و، در این کتاب، با ویژگی‌های دیگری هم آشنا می‌شویم.

مثال ۱. *تابع با ضابطهٔ* $y = \frac{۲x + ۵}{x - ۳}$ *داده شده است: ۱) مقدار تابع را به‌ازای* $x = \frac{۵}{۲}$ *و* $x = -\sqrt{۳}$ *پیدا کنید. ۲) اگر فرض کنیم* $y = f(x)$*،* $f(x + ۳)$*،* $f\left(\frac{۲}{x}\right)$ *و* $f(f(x))$ *را به‌دست آورید. ۳) دامنه و برد تابع را معین کنید. ۴) آیا این تابع، متناوب است؟ ۵) آیا این تابع، زوج یا فرد است؟ ۶) تابع وارون این تابع را پیدا کنید.*

حل. ۱) پاسخ $y = -۲۰$ و $y = \frac{۷}{۲} - \frac{۱۱}{۶}\sqrt{۳}$.

۲) به‌ترتیب داریم:

$$f(x + ۳) = \frac{۲(x + ۳) + ۵}{(x + ۳) - ۳} = \frac{۲x + ۱۱}{x}(x \neq ۳,\ x \neq ۰);$$

$$f\left(\frac{۲}{x}\right) = \frac{۲ \times \frac{۲}{x} + ۵}{\frac{۲}{x} - ۳} = \frac{۴ + ۵x}{۲ - ۳x}\left(x \neq ۳,\ x \neq \frac{۲}{۳}\right);$$

$$f(f(x)) = -\frac{۲f(x) + ۵}{f(x) - ۳} = \frac{\frac{۴x + ۱۰}{x - ۳} + ۵}{\frac{۲x + ۵}{x - ۳} - ۳} =$$

$$= \frac{۹x - ۵}{-x + ۱۴}(x \neq ۳,\ x \neq ۱۴)$$

۳) روشن است که x می‌تواند همهٔ عددهای حقیقی، به‌جز $x = ۳$ را اختیار کند: دامنهٔ تابع را، به‌طور معمول، با D_f نشان می‌دهند و می‌توان آن را به یکی از صورت‌های زیر نوشت:

$$D_f = \{x \in \mathbf{R}|,\ x \neq ۳\} \quad \text{یا به‌طور ساده} \quad D_f : x \neq ۰$$

برای بُرد تابع، وقتی x و y در تناظر یک‌به‌یک باشند (مثل مسالهٔ ما) می‌توان x را برحسب y محاسبه کرد:

$$y = \frac{۲x + ۵}{x - ۳} \Rightarrow x = \frac{۳y + ۵}{y - ۲}$$

از این‌جا روشن می‌شود که y می‌تواند همهٔ عددهای حقیقی، به‌جز $y = ۲$ را اختیار کند. بُرد تابع را، به‌طور معمول با E_f نشان می‌دهند:

$$E_f = \{y \in \mathbf{R}|y \neq ۲\} \text{ یا } E_f : y \neq ۲$$

۴) این تابع متناوب نیست. اگر فرض کنیم $T \neq ۰$ دورهٔ تناوب تابع است، باید بتوان T را طوری پیدا کرد که، به‌ازای آن داشته باشیم: $f(x + T) = f(x)$. ولی

$$f(x + T) = \frac{۲x + ۲T + ۵}{x + T - ۳}$$

که اگر آن را برابر $f(x)$ قرار دهیم:

$$\frac{۲x + ۲T + ۵}{x + T - ۳} = \frac{۲x + ۵}{x - ۳} \Rightarrow T(x - ۳) = T(۲x + ۵)$$

و این برابری تنها وقتی برای هر $x \neq ۳$ برقرار است که داشته باشیم $T = ۰$. تابع متناوب نیست.

۵) تابع، نه زوج است و نه فرد، زیرا داریم: $f(x) \neq f(-x)$ و $f(x) \neq -f(-x)$ (آزمایش کنید).

یادداشت. می‌دانیم اگر تابعی زوج باشد، یعنی با تبدیل x به $-x$ در آن، مقدار y تغییر نکند، به این معناست که محور $y'y$ محور تقارن نمودار تابع است. همچنین اگر تابعی فرد باشد، یعنی با تبدیل x به $-x$، مقدار y هم به $-y$ تبدیل شود، مبداء مختصات مرکز تقارن نمودار تابع است. آیا می‌توان با جابه‌جا کردن محورهای مختصات و انتقال مبداء به نقطهٔ دیگری از صفحه، معادله‌ای برای نمودار در دستگاه جدید به‌دست آید که تابعی زوج یا فرد شود، یعنی یا محور $y'y$ محور تقارن و یا مبداء مختصات مرکز تقارن آن باشد؟ فرض می‌کنیم، مبداء مختصات را به نقطهٔ $w(o, b)$ برده باشیم. در این صورت اگر (X, Y) مختصات جدید نقطه‌ای از نمودار تابع باشد، با (x, y) یعنی مختصات قدیم، با این رابطه‌ها به هم مربوط‌اند:

$$x = X + a, \quad y = Y + b$$

که اگر به‌جای (x, y) در معادلهٔ تابع قرار دهیم، به‌دست می‌آید:

$$Y + b = \frac{۲(X + a) + ۵}{X + a - ۳} \Rightarrow$$

$$XY + (b - ۲)X + (a - ۳)Y + b(a - ۳) - ۲a - ۵ = ۰ \quad (۱)$$

آیا می‌توان a و b را طوری پیدا کرد که، به‌ازای آن‌ها، با تبدیل X به $-X$، معادلهٔ (۱) تغییر نکند؟ وقتی X را به $-X$ تبدیل کنیم، جملهٔ XY به $-XY$ تبدیل می‌شود، بنابراین، اگر بخواهیم معادلهٔ (۱) تغییر نکند، باید جمله‌های دیگر هم تغییر علامت بدهند. جملهٔ $X(۲ - b)$ با تبدیل X به $-X$ تغییر علامت می‌دهد. تنها راه برای تغییر علامت جملهٔ شامل Y و جملهٔ ثابت، این است که برابر صفر باشند، یعنی داشته باشیم:

$$a - ۳ = ۰, \quad b(a - ۳) - ۲a - ۵ = ۰$$

ولی این دستگاه برای a و b، جواب ندارد. تابع $y = \frac{۲x + ۵}{x - ۳}$ را نمی‌توان به تابعی زوج تبدیل کرد و این، به‌معنای آن است که نمودار این تابع، محور تقارنی موازی محور $y'y$ ندارد (چرا؟).

ولی می‌توان a و b را طوری پیدا کرد که، به‌ازای آن، با تبدیل X به $-X$ و Y به $-Y$، تغییر نکند. وقتی X و Y به قرینه‌های خود تبدیل شوند، جملهٔ XY در (۱)، تغییر نمی‌کند. مقدار ثابتِ معادلهٔ (۱) هم با تبدیل X به $-X$ و Y به $-Y$ تغییر نمی‌کند (زیرا به X و Y بستگی ندارد). بنابراین کافی است ضریب‌های X و Y برابر صفر شوند:

$$\begin{cases} b - ۲ = ۰ \\ a - ۳ = ۰ \end{cases} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} a = ۳ \\ b = ۲ \end{array} \right.$$

که در این‌صورت، معادلهٔ (۱) به‌صورت $Y = \frac{۱۱}{X}$ درمی‌آید که تابعی فرد است، یعنی مبداء مختصات مرکز تقارنِ نمودار آن است. تابع $y = \frac{۲x + ۵}{x - ۳}$ دارای یک مرکز تقارن است: $w(۳, ۲)$ مرکز تقارن آن است.

۶) وقتی در تابعی، x و y در تناظر یک‌به‌یک باشند، یعنی به‌ازای هر x، تنها یک مقدار برای y، و به‌ازای هر مقدار y، تنها یک مقدار برای x به‌دست آید، می‌توان با بیان x برحسب y، شکل تابع وارون را پیدا کرد: $x = \frac{۳y + ۵}{y - ۲}$ چون در این برابری y متغیر و x تابع است، بهتر است متغیر را با x و تابع را با y نشان دهیم. به‌این ترتیب، اگر $f(x) = \frac{۲x + ۵}{x - ۳}$، آن‌وقت تابع وارون آن چنین است:

$$f^{-۱}(x) = \frac{۳x + ۵}{x - ۲}$$

یادداشت. توجه کنید: وقتی می‌گوییم به‌ازای هر مقدار x، منظور از مقدارهای قابل‌قبول برای x است. در مسالهٔ ما، مقدارهای قابل قبول برای

x، همهٔ عددهای حقیقی به‌جز $x = ۳$ است.

* **مثال ۲.** *دامنه و بُرد تابعی را پیدا کنید که ضابطهٔ آن چنین است:*

$$y = \frac{\cos^۲ x - ۴\cos x + ۵}{۳ - ۲\cos x}$$

حل. x می‌تواند هر مقدار حقیقی را اختیار کند، زیرا مخرج کسر، یعنی $۳ - ۲\cos x$ نمی‌تواند برابر صفر باشد:

$$۳ - ۲\cos x = ۰ \Rightarrow \cos x = \frac{۳}{۲}$$

ولی $\cos x$ نمی‌تواند مقداری بزرگتر از واحد باشد. در واقع مخرج کسر، همیشه مثبت است، زیرا $۲\cos x < ۳$.

به این نکته هم توجه کنید: وقتی می‌گوییم، x می‌تواند هر عدد حقیقی دلخواه باشد ($x \in \mathbf{R}$)، باید عددهای حقیقی را، با واحد رادیان به‌حساب آورد: $x = ۲$، یعنی x برابر ۲ رادیان است (به‌تقریب برابر ۱۱۵ درجه).

برای پیدا کردن بُرد تابع، ابتدا توجه می‌کنیم:

$$\cos^۲ x - ۴\cos x + ۵ \leq ۶ - ۴\cos x$$

زیرا $\cos^۲ x$ مقداری مثبت و بیشترین مقدار آن برابر واحد است؛ در واقع، اگر $x = k\pi$، آن‌وقت $\cos^۲ x = ۱$ و اگر $x \neq k\pi$، آن‌وقت $\cos^۲ x < ۱$.
بنابراین

$$y = \frac{\cos^۲ x - ۴\cos x + ۵}{۳ - ۲\cos x} \leq \frac{۶ - ۴\cos x}{۳ - ۲\cos x} = ۲$$

$y \leq ۲$، به‌معنای آن است که بیشترین مقدار y برابر است با ۲، که به‌ازای $x = k\pi$ به‌دست می‌آید.

اکنون کسرِ ضابطهٔ تابع را به‌صورت دیگری تبدیل می‌کنیم:

$$\frac{\cos^۲ x - ۴\cos x + ۵}{۳ - ۲\cos x} = \frac{(۳ - ۲\cos x)^۲ + ۵ + (۶ - ۴\cos x)}{۴(۳ - ۲\cos x)} =$$

$$= \frac{۳ - ۲\cos x}{۴} + \frac{۵}{۴(۳ - ۲\cos x)} + \frac{۱}{۲}$$

ولی برای دو عدد مثبت a و b، همیشه نابرابری $a + b \geq ۲\sqrt{ab}$ برقرار است (چرا؟) و علامت برابری برای حالت $a = b$ پیش می‌آید. بنابراین

$$\frac{۳ - ۲\cos x}{۴} + \frac{۵}{۴(۳ - ۲\cos x)} \geq$$

$$\geq ۲\sqrt{\frac{۳ - ۲\cos x}{۴} \times \frac{۵}{۴(۳ - ۲\cos x)}} = \frac{\sqrt{۵}}{۲}$$

از این‌جا نتیجه می‌گیریم:

$$y \geq \frac{\sqrt{۵}}{۲} + \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲}(\sqrt{۵} + ۱)$$

حالت برابری وقتی پیش می‌آید که داشته باشیم:

$$\frac{۳ - ۲\cos x}{۴} = \frac{۵}{۴(۳ - ۲\cos x)} \Rightarrow \cos x = \frac{۳ - \sqrt{۵}}{۲}$$

به‌این ترتیب، برای بُرد تابع به‌دست می‌آید:

$$\frac{۱}{۲}(\sqrt{۵} + ۱) \leq y \leq ۲$$

پاسخ. $D_f : x \in \mathbf{R}$؛ $E_f : \frac{۱}{۲}(\sqrt{۵} + ۱) \leq y \leq ۲$. مقدار تابع به‌ازای $\cos x = \frac{۳ - \sqrt{۵}}{۲}$ به‌کمترین مقدار خود برابر $\frac{۱}{۲}(\sqrt{۵} + ۱)$ و به‌ازای $x = k\pi$ به بیشترین مقدار خود برابر ۲ می‌رسد.

§۵. یادآوریِ تعریف‌ها

دو مجموعهٔ X و Y را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم، هر عضو x از مجموعهٔ X، به‌یاری قانونی که آن را قانون f می‌نامیم، متناظر با یک و تنها یک عضو y از مجموعهٔ Y باشد. در این‌صورت می‌گویند تابع $y = f(x)$ در مجموعهٔ X تعریف شده است.

قانون f، یعنی تناظر بین x و y، می‌تواند به‌صورت‌های مختلفی داده شده باشد: **تحلیلی**، یعنی به‌یاری یک دستور که به‌کمک آن بتوان با در دست داشتن مقدار x (از مجموعهٔ X)، مقدار y (از مجموعهٔ Y) را با عمل‌های حسابی یا جبری به‌دست آورد؛ **نموداری**، یعنی وجود یک نمودار (به‌عنوان نمونه، در دستگاه محورهای مختصات) که به‌کمک آن، بتوان با معلوم بودن x، y را مشخص کرد؛ به‌کمک **جدول** که تناظر x و y در آن معین شده باشد، به‌یاری بیان **توصیفی** و غیره. در دبیرستان، بیش از همه، بیان تحلیلی تابع (به‌وسیلهٔ یک فرمول) مطرح است و، بنابراین، از این به‌بعد تنها در بارهٔ تابع‌هایی صحبت می‌کنیم که به‌وسیلهٔ فرمول داده شده‌اند.

ولی یک فرمول، به‌خودی خود، نمی‌تواند یک تابع را معرفی کند، مگر این‌که مجموعهٔ X، یعنی محدودهٔ تغییر x (دامنهٔ تابع) معین باشد. برای این‌که تابع مشخص باشد، باید بدانیم با چه مجموعه‌ای از X سروکار داریم! وقتی می‌نویسیم $y = x^{۲}$، می‌توان تابع‌های مختلفی را در نظر گرفت: مجذور عددهای طبیعی، مساحت مربع‌هایی که ضلعی به‌طول x دارند، توان‌های دوم همهٔ عددهای حقیقی، توان‌های دوم همهٔ عددهای موهومی و غیره. در این‌جاست که، به‌طور طبیعی، با مفهوم «دامنه» سروکار پیدا می‌کنیم:

مجموعهٔ X، که در شکل گرفتن تابع نقش دارد، دامنهٔ آن نامیده می‌شود.

دامنهٔ تابع، یعنی مقدارهایی که متغیر x، می‌تواند اختیار کند.

برای بیان تابع، **لازم و کافی** است که قانون f (یعنی قانونی که تناظر بین

$x \in X$ و $y \in Y$ را معین می‌کند) و **حوزهٔ تعریف** X (یعنی دامنهٔ تابع) معلوم باشد. اگر قانون f به‌وسیلهٔ یک دستور (فرمول) داده شده باشد، ولی در بازهٔ X (یعنی دامنهٔ تابع) حرفی به‌میان نیاید، باید X را مجموعهٔ همهٔ عددهای حقیقی **قابل قبول** در نظر گرفت.

طبیعی است که، با معلوم بودن مجموعهٔ X، به اندیشهٔ مشخص کردن مجموعهٔ Y بیفتیم. *مجموعهٔ مقدارهایی را که $y \in Y$ می‌تواند اختیار کند،* ***بُرد تابع*** *می‌نامیم.* اگر در تابع با ضابطهٔ $y = \log x$، مقدار x (یعنی **دامنهٔ** تابع) تنها می‌تواند عددهای مثبت باشد ($x > ٠$)، درعوض مقدار y (برد تابع) می‌تواند هر عدد حقیقی باشد ($y \in R$)، زیرا به‌ازای $x = ١$ برای y مقدار صفر، به‌ازای $٠ < x < ١$ برای y عددهای منفی و به‌ازای $x > ١$، برای y عددهای مثبت به‌دست می‌آید.

ساده‌ترینِ تابع‌هایی که با آن‌ها سروکار داریم، برای ما، **تابع خطی** است. برابری $y = ax + b$ را در نظر می‌گیریم. روشن است که، هر مقدار حقیقی x، متناظر است با تنها یک مقدار حقیقی y. از این گذشته، x می‌تواند هر عدد حقیقی باشد: $x \in \mathbf{R}$.

به‌همین ترتیب، با شرط $a \neq ٠$، هر عدد حقیقی $y_٠$ متناظر است با عددی مثل $x_٠$، به‌نحوی که داشته باشیم: $y_٠ = ax_٠ + b$. در واقع، با در دست داشتن $y_٠$، از برابری $y_٠ = ax_٠ + b$ به‌دست می‌آید: $x_٠ = \frac{y_٠ - b}{a}$؛ درضمن برای $x_٠$ هم، همیشه یک مقدار نتیجه می‌شود. بنابراین، y هم می‌تواند هر مقدار حقیقی باشد ($y \in \mathbf{R}$: بُرد تابع).

در حالت خاص، می‌توان نقطهٔ صفر تابع را پیدا کرد، یعنی مقداری از x را که به‌ازای آن، تابع $ax + b$ برابر صفر شود. این مقدار $x = -\frac{b}{a}$ است.

مقدارهایی از متغیر که به‌ازای آن‌ها، تابع برابر صفر می‌شود، صفرها (یا نقطه‌های صفر) یا ریشه‌های تابع نامیده می‌شود. وقتی $x \neq -\frac{b}{a}$، آن‌وقت

تابع، یا برابر مقداری مثبت و یا برابر مقداری منفی است:

اگر $a > 0$، آن‌وقت مقدار تابع به‌ازای $x > -\frac{b}{a}$ مثبت و به‌ازای $x < -\frac{b}{a}$ منفی است؛

اگر $a < 0$، آن‌وقت تابع به‌ازای $a > -\frac{b}{a}$ منفی و به‌ازای $x < -\frac{b}{a}$ مثبت است.

به‌این ترتیب، تابع $y = ax + b$، در بازهٔ $\left(-\infty, -\frac{b}{a}\right)$ و همچنین در بازهٔ $\left(-\frac{b}{a}, +\infty\right)$ علامتی ثابت دارد.

مثال ۳. *برای تابع درجه دوم* $y = x^{۲} - ۴x - ۵$، *۱) دامنهٔ و بُرد، ۲) نقطه‌های صفر را پیدا کنید، ۳) نمودار این تابع، دارای محور تقارنی موازی محور $y'y$ است، آن را به‌دست آورید، ۴) تابع در چه بازه‌هایی مثبت و در چه بازه‌هایی منفی است؟*

حل. ۱) متغیر x می‌تواند هر مقدار حقیقی را اختیار کند (دامنهٔ تابع: $x \in \mathbf{R}$)، در ضمن، برای هر مقدار x، تنها یک مقدار برای y به‌دست می‌آید.

اما دربارهٔ بُرد تابع، y چه مقدارهایی را می‌تواند اختیار کند؟ به‌ازای هر مقدار حقیقی x، مقداری حقیقی برای y پیدا می‌شود. ولی آیا y می‌تواند هر مقدار حقیقی باشد؟ وقتی با یک تابع درجه دوم سروکار داشته باشیم، می‌توان با روش‌های مختلفی بُرد آن را پیدا کرد. در این‌جا برای تابع درجه دوم مفروض، دو روش را می‌آوریم:

I. **روش تبدیل به مجذور کامل.** در حالت کلی و برای تابع

$$y = ax^{۲} + bx + c$$

می‌توان آن را به‌این صورت تبدیل کرد (به‌شرط $a > ۰$):

$$y = \left[(\sqrt{a}x)^۲ + bx + \frac{b^۲}{۴a}\right] - \frac{b^۲}{۴a} + c$$

مقدار داخل کروشه، مجذور یک دوجمله‌ای است، درنتیجه

$$y = \left(\sqrt{a}x + \frac{b}{۲\sqrt{a}}\right)^۲ + \frac{۴ac - b^۲}{۴a} \geq \frac{۴ac - b^۲}{۴a}$$

درستی این نابرابری روشن است. $\left(\sqrt{a}x + \frac{b}{۲\sqrt{a}}\right)^۲$ نمی‌تواند منفی باشد، بنابراین کمترین مقدار y برابر $\frac{۴ac - b^۲}{۴a}$ است که به‌ازای $x = -\frac{b}{۲a}$ به‌دست می‌آید. در حالت $a > ۰$، بُرد تابع، یعنی مقدارهایی که y می‌تواند بپذیرد، عبارت است از $y \geq \frac{۴ac - b^۲}{۴a}$.

در حالت $a < ۰$، تبدیل را به‌این ترتیب انجام می‌دهیم:

$$y = -\left(\sqrt{-a}x + \frac{b}{۲\sqrt{-a}}\right)^۲ - \frac{b^۲}{۴a} + c \leq \frac{۴ac - b^۲}{۴a}$$

بنابراین، برای $y = ax^۲ + bx + c$، مقدار y در حالت $a > ۰$ حداقل و در حالت $a < ۰$ حداکثر دارد.

دربارهٔ $y = x^۲ - ۴x - ۵$ داریم:

$$y = (x - ۲)^۲ - ۹ \geq -۹$$

کمترین مقداری که y می‌تواند اختیار کند $y = -۹$ است که به‌ازای $x = ۲$ به‌دست می‌آید.

پاسخ. $x \in \mathbf{R}$ و $y \geq -۹$.

II. **روش دوم. استفاده از شرط حقیقی بودن ریشه‌ها.** اگر معادلهٔ تابع را به‌صورت

$$x^{۲} - ۴x - ۵ - y = ۰$$

بنویسیم، معادله‌ای درجه دوم به‌دست می‌آید که ریشه‌های آن به «پارامتر» y بستگی دارد و شرط وجود ریشه‌های حقیقی برای آن، این است که مبین آن منفی نباشد:

$$A = ۱۶ - ۴(-۵ - y) = ۴y + ۳۶ \geq ۰ \Rightarrow y \geq -۹$$

۲) نقطه‌های صفر تابع، با فرض $y = ۰$ به‌دست می‌آید.

پاسخ. $A(-۱, ۰)$ و $B(۵, ۰)$ نقطه‌های صفر تابع‌اند.

۳) خط راست موازی محور $y'y$ معادله‌ای به‌صورت $x = m$ دارد. بنابراین، اگر مبداء مختصات را به نقطه $w(m, ۰)$ منتقل کنیم، باید در معادلهٔ جدید، تبدیل x به $-x$، مقدار y را تغییر ندهد، یعنی به تابعی زوج تبدیل شود.

اگر (x, y) را مختصات قدیم و (X, Y) را مختصات جدید نقطهٔ واقع بر نمودار بگیریم، باید داشته باشیم:

$$x = X + m, \quad y = Y$$

به‌جای x و y در معادلهٔ تابع قرار می‌دهیم:

$$Y = (X+m)^{۲} - ۴(x+m) - ۵ = X^{۲} + ۲(m-۲)X + m^{۲} - ۴m - ۵$$

برای این‌که با تابعی زوج سروکار داشته باشیم، باید جملهٔ درجه اول شامل x وجود نداشته باشد، زیرا با تبدیل x به $-x$، تنها همین جمله است که تغییر علامت می‌دهد. از این‌جا، با صفر قرار دادن ضریب x، به‌دست می‌آید $m = ۲$. خط راست $x = ۲$ محور تقارن نمودار تابع است.

۴) باید ببینیم عبارت $x^۲ - ۴x - ۵$ به‌ازای چه مقدارهایی از x مثبت و به‌ازای چه مقدارهایی از x منفی است. با عبارتی درجه دوم سروکار داریم که دارای دو ریشهٔ حقیقی است (-۱ , ۵) و، درضمن، ضریب جملهٔ درجه دوم آن مثبت است. بنابراین، این عبارت در بازهٔ $(-۱, ۵)$ [یعنی به‌ازای عددهایی که بین دو ریشه باشند] منفی و در بازه‌های $(-\infty, -۱)$ و $(۵, +\infty)$ [یعنی به‌ازای مقدارهایی از x که از هر دو ریشه کوچکتر یا از هر دو ریشه بزرگر باشند] مثبت است.

پاسخ. اگر $x = -۱$ یا $x = ۵$، آن‌وقت $y = ۰$؛
اگر $-۱ < x < ۵$، آن‌وقت $y < ۰$؛
اگر $x < -۱$ یا $x > ۵$، آن‌وقت $y > ۰$.

جهت تغییر تابع. تابع خطی $y = ۲x - ۷$ را در نظر می‌گیریم. در این تابع، جهت تغییر y با جهت تغییر x هم‌خوان است، یعنی اگر x بزرگتر شود، مقدار y هم بزرگتر می‌شود و برعکس. به زبان ریاضی، اگر به x مقدار مثبتی اضافه شود، به y هم مقداری مثبت اضافه می‌شود و، برعکس، اگر به x مقداری منفی اضافه شود، به y هم مقداری منفی اضافه می‌شود.

دو عدد $x_۱$ و $x_۲$ را با شرط $x_۱ < x_۲$ در نظر می‌گیریم. داریم:

$$y_۱ = ۲x_۱ - ۷, \quad y_۲ = ۲x_۲ - ۷$$

از آن‌جا $y_۱ - y_۲ = ۲(x_۱ - x_۲)$. روشن است که با فرض $x_۱ < x_۲$، به‌دست می‌آید $x_۱ - x_۲ < ۰$ و درنتیجه $y_۱ - y_۲ < ۰$ و $y_۱ < y_۲$. به‌همین ترتیب، اگر فرض کنیم $x_۱ > x_۲$، به‌دست می‌آید $y_۱ > y_۲$. می‌گویند، تابع y برای $x \in \mathbf{R}$، **تابعی یکنوا است** [یکنوا = مونوتون].

اکنون اگر تابع خطی $y = -۳x + ۵$ را در نظر بگیریم، به نتیجهٔ دیگری می‌رسیم. در این‌جا، بافرض $x_۱ < x_۲$ به‌دست می‌آید $y_۱ > y_۲$ و

بافرض $x_2 < x_1$ نتیجه می‌شود $y_2 < y_1$ (ثابت کنید!). این تابع خطی هم، برای همهٔ مقدارهای حقیقی x، تابعی یکنوا است.

ولی دو تابع خطی $y = 2x - 7$ و $y = -3x + 5$، گرچه هردو برای $x \in \mathbf{R}$ یکنوا هستند، با هم تفاوت دارند. اولی را **تابع صعودی** و دومی را **تابع نزولی** گویند.

اگر برای مقدارهای دلخواه $x_1 < x_2$ واقع در دامنهٔ تابع، بازه‌ای وجود داشته باشد که در آن، برای تابع $y = f(x)$ به‌دست آید $f(x_1) < f(x_2)$، آن‌وقت تابع در این بازه صعودی و اگر $f(x_1) > f(x_2)$، آن‌وقت تابع را در این بازه نزولی گویند.

اگر برای $x_1 \leq x_2$ داشته باشیم $f(x_1) \leq f(x_2)$، تابع را **غیر نزولی** و اگر داشته باشیم $f(x_1) \geq f(x_2)$، تابع را **غیرصعودی** واگر داشته باشیم $f(x_1) = f(x_2)$، تابع را **ثابت** گویند.

مثال ۴. *تابع $y = -x^2 + 4x - 3$ در چه بازه‌ای صعودی و در چه بازه‌ای نزولی است.*

حل. اگر تابع را به‌صورت

$$y = -x^2 + 4x - 3 = -(x - 2)^2 + 1$$

بنویسیم، روشن می‌شود که، برای این تابع داریم: $y \leq 1$. بیشترین مقدار تابع، برابر است با ۱ که به‌ازای $x = 2$ به‌دست می‌آید. تابع برای هر $x \in \mathbf{R}$ معنا دارد. بازهٔ $(-\infty, +\infty)$ را به دو بازه تقسیم می‌کنیم:

$$(-\infty, 2), \quad (2, +\infty)$$

تابع، در بازهٔ $(-\infty, 2)$ صعودی است، زیرا با فرض $x_1 < x_2$ داریم:

$$f(x_1) - f(x_2) = -(x_1^2 - x_2^2) + 4(x_1 - x_2) =$$
$$= -(x_1 - x_2)(x_1 + x_2 - 4)$$

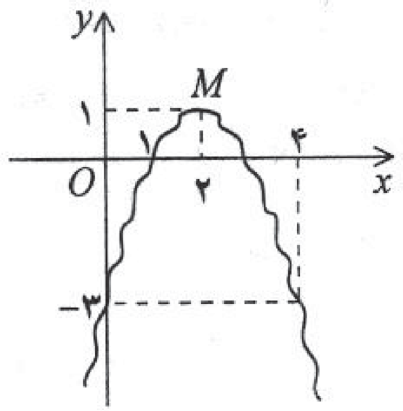
چون $x_2 < x_1$، پس $x_1 - x_2 < 0$ و $x_1 + x_2 - 4 < 0$ [x_1 و x_2 را کوچکتر از ۲ و از بازهٔ $(-\infty, 2)$ انتخاب کرده‌ایم]، پس

$$f(x_1) - f(x_2) < 0 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

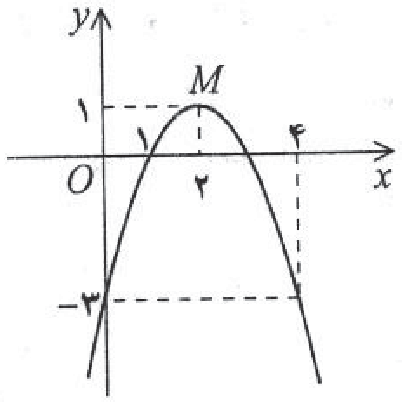
تابع در بازهٔ $(-\infty, 2)$ صعودی است. به‌همین ترتیب، ثابت می‌شود که، این تابع، در بازهٔ $(2, +\infty)$ نزولی است.

می‌توان گفت تابع $y = -x^2 + 4x - 3$، در بازهٔ $(-\infty, 2]$ غیرصعودی یا یکنوایِ نزولی و در بازهٔ $[2, +\infty)$، غیرنزولی یا یکنوای صعودی است. تابع در نقطهٔ $M(2, 1)$ به بیشترین مقدار خود (یعنی $y = 1$) می‌رسد. به‌همین مناسبت M را نقطهٔ ماکزیمم تابع گویند.

یادداشت. نقطه‌های صفر تابع عبارت است از $x = 1$ و $x = 3$، یعنی نمودار آن در این نقطه‌ها محور $x'x$ را قطع می‌کند. نقطه $(2, 1)$، بالاترین نقطهٔ نمودار (راس سهمی) است. نمودار از نقطه‌های $(0, -3)$ و $(4, -3)$ می‌گذرد. یکنوایی تابع در بازه‌های $(-\infty, 2)$ و $(2, +\infty)$، به این معناست که نمودار تابع در این بازه‌ها هموار است (شکل ۱)، نه شبیه شکل ۲، که از نقطه‌های اصلی نمودار گذشته است، ولی نمودار تابع نیست.



شکل ۲



شکل ۱

مثال ۵. *تابع با ضابطهٔ* $y = \frac{x-1}{x-2}$ *را در نظر می‌گیریم:*

۱) *دامنه و برد تابع را پیدا کنید؛*

۲) *جهت تغیر تابع را پیدا کنید؛*

۳) *نمودار تابع را رسم کنید.*

حل. ۱) x می‌تواند هر مقدار دلخواه به‌جز $x = 2$ را اختیار کند. مقدارهای قابل‌قبول برای x (دامنهٔ تابع) عبارت است از $x \neq 2$. اگر در ضابطهٔ تابع، x را برحسب y محاسبه کنیم، به‌دست می‌آید $x = \frac{2y-1}{y-1}$. در این صورت روشن است که y هم می‌تواند همهٔ عددهای حقیقی به‌جز $y = 1$ را بپذیرد. برد تابع (مقدارهایی که تابع یعنی y اختیار می‌کند) عبارت است از $y \neq 1$.

۲) y را $f(x)$ می‌نامیم. می‌دانیم $x \neq 2$. دو حالت در نظر می‌گیریم:

حالت اول $x < 2$ دو عدد x_1 و x_2 را طوری انتخاب می‌کنیم که داشته باشیم: $x_1 < x_2 < 2$. داریم:

$$f(x_1) = \frac{x_1 - 1}{x_1 - 2}, \quad f(x_2) = \frac{x_2 - 1}{x_2 - 2}$$

ببینیم $f(x_1) - f(x_2)$ چه علامتی دارد:

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{x_1 - 1}{x_1 - 2} - \frac{x_2 - 1}{x_2 - 2} = \frac{x_2 - x_1}{(x_1 - 2)(x_2 - 2)}$$

چون مقدارهای $x_1 - 2$ و $x_2 - 2$ منفی و حاصل‌ضرب آن‌ها مثبت است:

$$(x_1 - 2)(x_2 - 2) > 0$$

x_1 را کوچکتر از x_2 فرض کردیم، پس $x_2 - x_1 > 0$. صورت و مخرج کسری که به‌دست آورده‌ایم، مثبت است، بنابراین

$$(x_1 < x_2 < 2) \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

یعنی در حالت $x > ۲$، اگر به x مقداری مثبت اضافه کنیم، به مقدار $f(x)$ (یعنی y) مقداری منفی اضافه می‌شود، به زبان ساده: اگر x را بزرگ کنیم، $f(x)$ کوچک می‌شود. تابع $y = \frac{x-۱}{x-۲}$، برای $x > ۲$، تابعی نزولی است.

حالت دوم $x < ۲$. در این حالت فرض می‌کنیم $۲ > x_۱ > x_۲$ شبیه حالت پیش به‌دست می‌آید:

$$f(x_۱) - f(x_۲) = \frac{x_۲ - x_۱}{(x_۱ - ۲)(x_۲ - ۲)} < ۰$$

یعنی در حالت $x < ۲$، تابع $y = \frac{x-۱}{x-۲}$ نزولی است.

تابع $y = \frac{x-۱}{x-۲}$ به‌ازای $x = ۲$ نامعین و به‌ازای دیگر مقدارهای x نزولی است.

۳) نمودار تابع در نقطهٔ $(۱, ۰)$ محور طول و در نقطهٔ $\left(۰, \frac{۱}{۲}\right)$ محور عرض را قطع می‌کند. همچنین نمودار تابع از نقطه‌های

$$\left(-۱, \frac{۲}{۳}\right), \quad \left(-۲, \frac{۳}{۴}\right), \quad \left(-۳, \frac{۴}{۵}\right), \ldots, \left(-۱۰۰, \frac{۱۰۰}{۱۰۱}\right), \ldots$$

و نقطه‌های

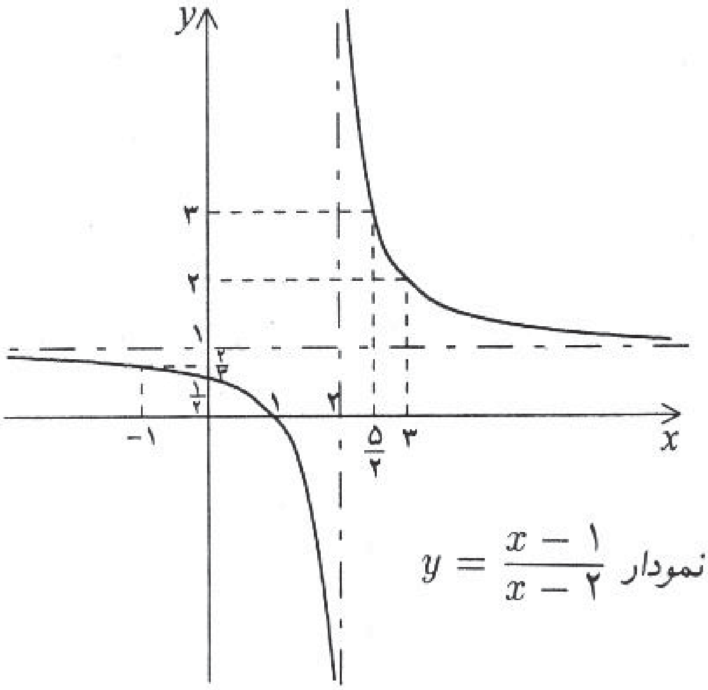
$$\left(\frac{۳}{۵}, -۱\right), \quad \left(\frac{۵}{۳}, -۲\right), \quad \left(\frac{۷}{۳}, -۳\right), \ldots, \left(\frac{۲۰۲}{۱۰۱}, -۱۰۰\right), \ldots$$

می‌گذرد. می‌بینیم هرچه x (در حالت $x < ۲$) کوچکتر شود، مقدار y به ۱ نزدیک‌تر می‌شود، به‌نحوی که اگر x به‌سمت $-\infty$ برود، y به‌سمت ۱ می‌رود. به‌همین ترتیب، هرچه y (در حالت $y < ۱$) کوچکتر شود، مقدار x به ۲ نزدیک می‌شود. این دو پدیده را این‌طور هم می‌توان نوشت:

$$\underset{x \to \infty}{\text{حد}}\, y = ۱ \quad \text{و} \quad \underset{y \to -\infty}{\text{حد}}\, x = ۲$$

این وضع، روی نمودار به‌خوبی دیده می‌شود.

شاخهٔ دوم نمودار، یعنی وقتی داشته باشیم $۲ < x$، به‌همین ترتیب به‌دست می‌آید (شکل ۳).



شکل ۳: نمودار $y = \frac{x - ۱}{x - ۲}$

یادداشت. خط‌های راست $x = ۲$ و $y = ۱$ را **مجانب** نمودار می‌نامند. برای رسم یک نمودار باید مجانب یا مجانب‌های آن را پیدا کرد (اگر وجود داشته باشد) و راهنمای رسم قرار داد.

مثال ۶. ۱) *برد تابع با ضابطهٔ* $y = \frac{x}{x^{۲} + ۱}$ *را پیدا کنید.*

۲) *این تابع در چه فاصله‌هایی صعودی و در چه فاصله‌هایی نزولی است؟*

۳) *نمودار تابع را رسم کنید.*

حل. ۱) روشن است که x می‌تواند هر عدد حقیقی را اختیار کند $x \in \mathbf{R}$. برای این‌که ببینیم y چه مقدارهایی را می‌پذیرد، برابری فرض

رانسبت به x منظم می‌کنیم، به‌ترتیب به‌دست می‌آید:

$$y = \frac{x}{x^۲ + ۱} \Rightarrow yx^۲ + y = x \Rightarrow yx^۲ - x + y = ۰$$

اگر در این معادلهٔ درجه دوم (نسبت به x)، y را پارامتر بگیریم، شرط وجود ریشه‌های حقیقی (برای x) چنین است:

$$\Delta = ۱ - ۴y^۲ \geq ۰ \Rightarrow (۱ - ۲y)(۱ + ۲y) \geq ۰$$

برای این‌که حاصل‌ضرب دو مقدار مثبت باشد، باید این دو مقدار هم‌علامت باشند:

$$۱)\quad \begin{cases} ۱ - ۲y \geq ۰ \\ ۱ + ۲y \geq ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \leq \frac{۱}{۲} \\ y \geq -\frac{۱}{۲} \end{cases} \Rightarrow -\frac{۱}{۲} \leq y \leq \frac{۱}{۲}$$

$$۲)\quad \begin{cases} ۱ - ۲y \leq ۰ \\ ۱ + ۲y \leq ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \geq \frac{۱}{۲} \\ y \leq -\frac{۱}{۲} \end{cases} \quad \text{(ناسازگار)}$$

بنابراین، مقدار y از $-\frac{۱}{۲}$ کوچکتر و از $\frac{۱}{۲}$ بزرگتر نمی‌تواند باشد. برای برد تابع داریم:

$$-\frac{۱}{۲} \leq y \leq \frac{۱}{۲}$$

یادداشت. به‌طور مستقیم هم می‌توان برد تابع را پیدا کرد. در حالت $x > ۰$، مقدار کسر $\frac{۲x}{x^۲ + ۱}$ از واحد تجاوز نمی‌کند، زیرا

$$\frac{۲x}{x^۲ + ۱} \leq ۱ \Rightarrow \frac{۲x}{x^۲ + ۱} - ۱ \leq ۰ \Rightarrow \frac{۲x - x^۲ - ۱}{x^۲ + ۱} \leq ۰$$

که منجر به نابرابری اتحادی $-\frac{(x-1)^2}{x^2+1} \le 0$ می‌شود. کسر سمت چپ نابرابری به‌ازای $x = 1$ برابر صفر و به‌ازای دیگر مقدارهای حقیقی x مقداری منفی است. به این ترتیب، برای $x \ge 0$ داریم:

$$y = \frac{1}{2} \times \frac{2x}{x^2+1} \le \frac{1}{2} \Rightarrow 0 \le y \le \frac{1}{2}$$

به‌همین ترتیب برای $x \le 0$ به‌دست می‌آید:

$$-\frac{1}{2} \le y \le 0$$

یعنی در هر حال $-\frac{1}{2} \le y \le \frac{1}{2}$.

۲) $x_1 < x_2$ می‌گیریم و دو حالت را به‌طور جداگانه بررسی می‌کنیم:

حالت اول $x_1 < x_2 \le -1$ یا $1 \le x_1 < x_2$. اگر $\frac{x}{x^2+1}$ را $f(x)$ بنامیم، داریم:

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{x_2}{x_2^2+1} - \frac{x_1}{x_1^2+1} = \frac{x_1^2 x_2 + x_2 - x_1 x_2^2 - x_1}{(x_2^2+1)(x_1^2+1)}$$

$$= -\frac{x_1 x_2 (x_1 - x_2) - (x_1 - x_2)}{(x_2^2+1)(x_1^2+1)} = \frac{(x_1 - x_2)(x_1 x_2 - 1)}{(x_2^2+1)(x_1^2+1)}$$

مخرج کسر همیشه مثبت است. در صورت کسر، $x_1 - x_2$ مقداری منفی است (زیرا $x_1 < x_2$). قدرمطلق‌های x_1 و x_2 از ۱ بزرگترند و بنابراین حاصل‌ضرب آن‌ها از ۱ بزرگتر می‌شود (ممکن است قدرمطلق یکی از دو مقدار x_1 یا x_2 برابر ۱ باشد، ولی در این صورت هم حاصل‌ضرب قدرمطلق‌های آن‌ها از ۱ بزرگتر می‌شود). درضمن x_1 و x_2 هم‌علامت‌اند،

بنابراین $x_۱x_۲ - ۱ < ۰$ و حاصل کسر منفی است. به‌این ترتیب برای $x \leq -۱$ و $x \geq ۱$، تابع مفروض نزولی است.

حالت دوم $-۱ \leq x_۱ < x_۲ \leq ۱$ با استدلالی مشابه حالت قبل روشن می‌شود که، در این حالت، تابع مفروض صعودی است.

پاسخ. تابع $y = \dfrac{x}{x^۲ + ۱}$ در بازه‌های $(-\infty, -۱]$ و $[۱, +\infty)$ نزولی و در بازهٔ $[-۱, ۱]$ صعودی است.

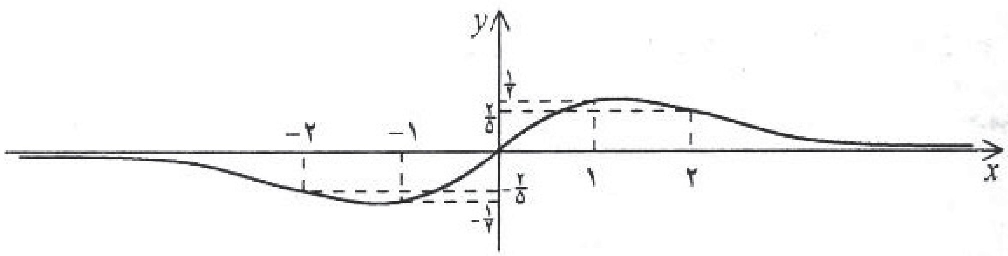
یادداشت. تابع تا نقطهٔ $\left(-۱, -\frac{۱}{۲}\right)$ نزولی و سپس صعودی است. نقطه‌ای از نمودار را که در آن‌جا تابع از حالت نزولی به حالت صعودی می‌رود، نقطهٔ **می‌نیمم نمودار** (یا دقیق‌تر می‌نیمم نسبی نمودار) گویند. به‌همین ترتیب، **ماکزیمم نمودار** (دقیق‌تر: ماکزیمم نسبی نمودار) به نقطه‌ای از نمودار گویند که در آن از حالت صعودی به حالت نزولی برود. نقطهٔ $\left(۱, \frac{۱}{۲}\right)$، نقطهٔ ماکزیمم نسبی نمودار است.

۳) نمودار از مبداء مختصات می‌گذرد و این نقطه مرکز تقارن آن است (زیرا با تبدیل x به $-x$ مقدار y هم به $-y$ تبدیل می‌شود). تابع در نقطهٔ $\left(-۱, -\frac{۱}{۲}\right)$ به پایین‌ترین نقطهٔ خود و در نقطهٔ $\left(۱, \frac{۱}{۲}\right)$ به بالاترین نقطهٔ خود می‌رسد. درضمن، هرچه قدرمطلق x بزرگتر شود، قدرمطلق مقدار y کوچکتر می‌شود، به‌نحوی‌که اگر قدرمطلق x به‌سمت بی‌نهایت بود، مقدار y به‌سمت صفر می‌رود:

$$\underset{x \to \pm\infty}{\text{حد}} \frac{x}{x^۲ + ۱} = ۰$$

جدول تغییر و نمودار تابع را در شکل ۴ داده‌ایم:

x	$-\infty$		-۲		-۱		۰		۱		۲		$+\infty$
y	۰	$\searrow$	$-\frac{۲}{۵}$	$\searrow$	$-\frac{۱}{۲}$	$\nearrow$	۰	$\nearrow$	$\frac{۱}{۲}$	$\searrow$	$\frac{۲}{۵}$	$\searrow$	۰



شکل ۴

مثال ۷. *ثابت کنید نمودار تابع* $y = \frac{۲x + ۱}{x - ۲}$ *دارای یک مرکز تقارن است. مختصات آن را پیدا کنید. آیا این مرکز تقارن روی منحنی است؟*

حل. روشن است که مبداء مختصات مرکز تقارن نمودار این تابع نیست، زیرا با تبدیل x به $-x$ تابع دیگری به‌دست می‌آید و به $-y$ تبدیل نمی‌شود (در واقع، تابعی فرد نیست). اگر نمودار تابع مرکز تقارنی داشته باشد، باید با انتقال محورها، به‌نحوی که مبداء مختصات دستگاه جدید بر مرکز تقارن منطبق شود، به معادله‌ای برای نمودار برسیم که معرف تابعی فرد باشد، یعنی با تبدیل x به $-x$، تغییر علامت بدهد.

مرکز تقارن نمودار را $w(\alpha, \beta)$ می‌گیریم. اگر محورهای مختصات را موازی با خود چنان جابه‌جا کنیم که مبداء جدید بر نقطهٔ w واقع شود، به‌معنای آن است x به $x + \alpha$ و y به $y + \beta$ تبدیل شود. در این‌صورت معادله جدید نمودار چنین می‌شود:

$$y + \beta = \frac{۲(x + \alpha) + ۱}{(x + \alpha) - ۲}$$

اگر مخرج را از بین ببریم و همهٔ جمله‌ها را به یک طرف برابری انتقال دهیم، سرانجام به‌دست می‌آید:

$$xy + (\alpha - ۲)y + (\beta - ۲)x + [\alpha\beta - ۲\beta - ۲\alpha - ۱] = ۰$$

ببینیم α و β را چگونه انتخاب کنیم که عبارت سمت چپ برابری با تبدیل xبه$-x$ و y به $-y$ تغییر نکند. جملهٔ ثابت $\alpha\beta - ۲\beta - ۲\alpha - ۱$ به x و y بستگی ندارد، بنابراین با تبدیل x به $-x$ و y به $-y$ تغییر نمی‌کند. جملهٔ xy هم با تبدیل x به $-x$ و y به $-y$ به‌صورت $(-x)(-y)$ یعنی xy درمی‌آید و تغییر نمی‌کند. ولی جمله‌های $(\alpha - ۲)y$ و $(\beta - ۲)x$ با تبدیل x به $-x$ و y به $-y$ به قرینهٔ خود تبدیل می‌شوند. بنابراین، این جمله‌ها نباید وجود داشته باشند و این وقتی ممکن است که ضریب‌های آن‌ها برابر صفر شود:

$$(\beta - ۲ = ۰, \quad a - ۲ = ۰) \Rightarrow (\alpha = ۲, \quad \beta = ۲)$$

نقطهٔ $w(۲, ۲)$ مرکز تقارن منحنی است.

§۶. عمل با تابع‌ها

۱. عمل‌های ساده، یعنی جمع، تفریق، ضرب و تقسیم دو تابع نیازی به توضیح ندارد. تنها باید به دو نکته توجه داشت:

دامنهٔ تابعی که از مجموع یا تفاضل و یا حاصل‌ضرب دو تابع به‌دست می‌آید، اشتراک دو تابع است و دربارهٔ تقسیم دو تابع بر یکدیگر، به‌جز محاسبهٔ اشتراک دوتابع، باید نقطه‌های صفر بخشیاب را هم حذف کرد.

مثال ۸. *اگر* $f(x) = \sqrt{x}$ *و* $g(x) = x - ۱$*، آن‌گاه* $f(x)+g(x)$*،* $f(x) - g(x)$*،* $f(x)g(x)$*،* $\frac{f(x)}{g(x)}$ *و دامنه هریک را پیدا کنید.*

حل. در آغاز یادآوری کنیم که عمل‌های چهارگانه روی تابع‌ها را به‌این صورت هم می‌توان نوشت:

$$f(x)+g(x)=(f+g)(x), \quad f(x)-g(x)=(f-g)(x),$$
$$f(x)g(x)=(f\cdot g)(x), \quad f(x):g(x)=\left(\frac{f}{y}\right)(x)$$

برای $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=x-۱$ داریم:

$$x\geq ۰ \quad : f \text{ دامنه } ; \quad x\in \mathbf{R} \quad : g \text{ دامنه }$$

بنابراین

$$۱) \quad (f+g)(x)=\sqrt{x}+x-۱, \quad (x\geq ۰)$$
$$۲) \quad (f-g)(x)=\sqrt{x}-x+۱, \quad (x\geq ۰)$$
$$۳) \quad (f\cdot g)(x)=\sqrt{x}(x-۱), \quad (x\geq ۰)$$
$$۴) \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{\sqrt{x}}{x-۱}, \quad (x\geq ۰,\ x\neq ۱)$$

یادداشت. توجه کنید، وقتی $f(x)=\sqrt{x}$، آن‌وقت

$$f^{۲}(x)=f(x)\cdot f(x)=x$$

ولی باتوجه به آنچه گفتیم، دامنهٔ تابع $f^{۲}(x)$ همان $x\geq ۰$ است.

۲. تابع مرکب یا تابعِ تابع. بارها درجلدهای پیشین«ریاضیات‌محاسبه‌ای» و در تمرین‌های آغازین همین کتاب، با تابع‌های مرکبی مثل $f(f(x))$ سروکار داشته‌ایم، ولی ترکیب را می‌توان روی دو تابع مختلف انجام داد. به این مثال‌ها توجه کنید.

مثال ۸. فرض کنید $f(x)=\log x$ و $g(x)=x-۱$. می‌خواهیم $g(f(x))$ و $f(g(x))$ را محاسبه و دامنهٔ هریک را پیدا کنیم.

حل. عمل محاسبهٔ $f(g(x))$ و $g(f(x))$ دشوار نیست:

$$f(g(x)) = f(x-۱) = \log(x-۱),$$
$$g(f(x)) = g(\log x) = \log x - ۱$$

دامنهٔ $f(x)$ عبارت است از $x > ۰$ (لگاریتم برای عددهای منفی و عدد صفر معنی ندارد):

$$D_f : x > ۰$$

بنابراین وقتی $f(g(x))$ را محاسبه می‌کنیم، چون $g(x)$ جانشین x در $f(x)$ می‌شود، باید داشته باشیم:

$$g(x) = x - ۱ > ۰ \Rightarrow x > ۱; \quad D_{fog} : x > ۱$$

برای $g(x)$، مقدار x می‌تواند هر عدد حقیقی باشد، بنابراین در $g(f(x))$، شرط $f(x) \in \mathbf{R}$ همان شرط $x > ۰$ است و داریم:

$$D_{gof} : x > ۰$$

همان‌طور که می‌بینید $f(g(x))$ را به‌صورت fog و $g(f(x))$ را به‌صورت gof هم می‌توان نوشت.

مثال ۹. با شرط $f(x) = \sqrt{x - ۱}$ و $g(x) = -x^۲ + ۱$، fog و gof را محاسبه کنید.

حل. داریم:

$$fog = f(-x^۲ + ۱) = \sqrt{(-x^۲ + ۱) - ۱} = \sqrt{-x^۲}$$

به‌نظر می‌رسد که fog برای $x = ۰$ قابل قبول است، ولی $x = ۰$ جزء دامنهٔ $f(x)$ نیست. $f(x)$ برای $x \geq ۱$ معنا دارد. به‌این ترتیب fog برای

هیچ مقدار حقیقی x قابل پذیرش نیست: fog معنا ندارد. ولی

$$gof = g(\sqrt{x-1}) = -(\sqrt{x-1})^2+1 = -x+1+1 = -x+2$$

آیا gof برای هر مقدار حقیقی x قابل قبول است؟ آیا $D_{gof} \in \mathbf{R}$؟ وقتی با $g(\sqrt{x-1})$ سروکار داریم، به‌معنای این است که $x \geq 1$ و چون برای $g(x)$، مقدار x می‌تواند هر عدد حقیقی باشد، بنابراین

$$D_{gof} : x \geq 1$$

مثال ۱۰. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2}{1+x^2}}$ و $g(x) = \tan x$. دامنهٔ fog را *پیدا کنید.*

حل. داریم:

$$fog = f(\tan x) = \sqrt{\frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x}} = \sqrt{\sin^2 x} = |\sin x|,$$

$$D_{fog} = \mathbf{R} - \{x = k\pi + \frac{\pi}{2}\}$$

تمرین‌ها

۳۲. خط‌های راست ۱) $x - 2y + 5 = 0$، ۲) $5x - 12y + 26 = 0$ ۳) $3x - 4y + 30 = 0$، ۴) $x + y - 17 = 0$ نسبت به دایرهٔ $x^2 + y^2 = 36$ چگونه قرار گرفته‌اند؟

۳۳. مطلوب است معادلهٔ

۱) مماس بر دایرهٔ $x^2 + y^2 = 5$ در نقطه $(-2, 1)$؛

۲) وتر مشترک دایرهٔ به معادلهٔ $x^2 + y^2 - 10x - 10y + 30 = 0$ و دایرهٔ به معادلهٔ $x^2 + y^2 = 10$؛

۳) خط راستی که از مرکز دایرهٔ $x^۲+y^۲+۴x+۱۲y+۱۵=۰$ موازی خط راست $x+y=۰$ رسم شده است؛

۴) خط راستی که از مرکزهای دو دایرهٔ $x^۲+y^۲-۲x-۴y-۴=۰$ و $x^۲+y^۲+۲x-۶y-۱۵=۰$ می‌گذرد؛

۵) خط راستی که از راس‌های سهمی‌های $y=-۳x^۲+۱۲x-۹$ و $y=x^۲+۱$ می‌گذرد.

۳۴. معادله‌های قطرهای یک مربع، به‌صورت $۴x-۵y+۳=۰$ و $۵x+۴y-۲۷=۰$ و مختصات یک راس آن $A(-۱,۸)$ است. معادلهٔ هریک از ضلع‌های مربع را پیدا کنید.

۳۵. معادلهٔ دو ضلع از یک متوازی‌الاضلاع به‌صورت

$$۳x-۷y+۴۱=۰,\quad ۲x-y-۲=۰$$

و مختصات نقطهٔ $M\left(\frac{۱}{۲},۴\frac{۱}{۲}\right)$ نقطهٔ برخورد قطرهای آن داده شده است. معادلهٔ دو ضلع دیگر متوازی‌الاضلاع را پیدا کنید.

۳۶. مثلثی در سهمی $y=x^۲+۶x+۱۵$ محاط شده است. اگر یک راس مثلث بر راس سهمی منطبق و قاعده‌اش روی خط راست $y=۱۰$ باشد، مساحت مثلث را پیدا کنید.

۳۷. یک سهمی از نقطه‌های $A(-۱,۲)$ و $B(۲,۵)$ می‌گذرد و نسبت به محور oy متقارن است. معادلهٔ سهمی را بنویسید و مساحت مثلثی را پیدا کنید که یک راس آن بر راس سهمی منطبق و دو راس دیگرش نقطه‌های برخورد خط راست $x-y+۷=۰$ با سهمی باشد.

۳۸. به‌شرط $f(x)=۲x^۲-۵x+۱۱$، مطلوب است $f(۰)$، $f\left(\frac{۱}{۲}\right)$، $f(a)$ و $f(b+۳)$.

۳۹. برای هریک از این تابع‌ها، دامنه و برد را معین کنید:

$1)\ y = x^2 - 6x + 9;$ $\qquad$ $2)\ y = \dfrac{1}{x^2 + x - 1};$

$3)\ y = \sqrt{x^2 - 4x};$

$4)\ y - \sqrt{-x^2 + 9};$ $\qquad$ $5)\ y = \sqrt{2x};$

$6)\ y = \sqrt{x + 5} - 1;$ $\qquad$ $7)\ y = \dfrac{x + 5}{2x - 1};$

$8)\ y = \dfrac{a}{x - b};$ $\qquad$ $9)\ y = \sin^6 x + \cos^6 x;$

$10)\ y = \sin x + \sqrt{3}\cos x + 1$

۴۰. این دستگاه‌ها را به‌یاری نمودار حل کنید:

$$1)\ \begin{cases} x^2 + 7x = y - 6 \\ y - x = 6 \end{cases};\quad 2)\ \begin{cases} 2x^2 - 2x = y + 3 \\ y^2 = 9 - x^2 \end{cases};$$

$$3)\ \begin{cases} y + x^2 - 1 = 0 \\ x + y^2 - 1 = 0 \end{cases};$$

۴۱. این نامعادله‌ها را به‌یاری نمودار حل کنید:

$$1)\ |x - 2| < 3;\quad 2)\ 3x + 9 > |x - 1|;\quad 3)\ |x + 2| < 1 - \frac{x}{4},$$

$$4)\ |x + 3| - |x - 2| < 0$$

۴۲. نمودار تابع‌هایی را رسم کنید که ضابطهٔ آن‌ها داده شده است:

$$1)\ y = \begin{cases} 1 + x^2 & (x < 0) \\ |\cos x| & (x \geq 0) \end{cases};\quad 2)\ y = |x^2 + 2x - 3|$$

۴۳. دامنهٔ تابع‌هایی را پیدا کنید که ضابطهٔ آن‌ها داده شده است:

$$1)\ y = \sqrt[4]{1 + x^4} - \sqrt{|2 + x| - 7};$$

$$۲)\ y = \sqrt{\frac{x}{|x|} - ۱} + \log(x^۲ - ۱);$$

$$۳)\ y = \sqrt{|x| - x} + \frac{x^۲ + ۱}{(x + ۱)(x - ۱)}$$

۴۴. دامنه و برد را پیدا کنید:

$$۱)\ y = \frac{x}{(x + ۱)(x - ۲)}; \qquad ۲)\ y = a \sin x + b \cos x;$$

$$۳)\ y = \frac{x^۲ + x - ۱}{x^۲ - x + ۱}; \qquad ۴)\ y = \frac{x + ۱}{|x| - ۱};$$

$$۵)\ y = |x - ۱| + |x + ۱|; \quad *۶) y = \sqrt{\frac{(x - ۲)^۲ + ۴}{x^۲ + ۴}}$$

۴۵. اگر $f(x)$ یک چندجمله‌ای باشد، $f(x)$ را پیدا کنید:

$$۱)\ f(f(x)) = ۴x - ۲۱;$$

$$۲)\ f(f(x)) = x^۴ - ۴x^۳ + ۸x^۲ - ۸x + ۶$$

* **۴۶.** تابع $f(x)$ برای $x \in R$ در شرط

$$f(x + a) = \frac{۱}{۲} + \sqrt{f(x) - [f(x)]^۲}$$

صدق می‌کند. ثابت کنید $f(x)$ تابعی متناوب است با کوچکترین دورهٔ تناوب برابر $۲a$.

۴۷. برای $a \neq ۱$ و $a > ۰$ ثابت کنید، تابع با ضابطهٔ

$$f(x) = \log_a(x + \sqrt{x^۲ + ۱}\ )$$

تابعی فرد است.

* ۴۸. در تعداد نقطه‌های برخورد نمودارهای دو تابع

$$y = \frac{mx + ۲}{x - ۱} \text{ و } y = \frac{x + m - ۱}{x + ۱}$$

بحث کنید و در حالتی که نمودارها دو نقطهٔ برخورد دارند، مکان نقطهٔ وسط نقطه‌های برخورد را پیدا کنید.

۲. حد و پیوستگی

پیش از پرداختن به این فصل، تمرین شمارهٔ ۱۶ از همین کتاب را با دقت بیشتری حل کنید. در آغاز این فصل، یک بحث تاریخی دربارهٔ آموزش حد در کتاب‌های دبیرستانی آورده‌ایم که، گرچه آن را با نشان (*) مشخص کرده‌ایم و به‌معنای آن است که می‌توان در برخورد اول از آن گذشت، ولی به‌دلیل وجود نکته‌های آموزنده‌ای که در آن است، سفارش می‌کنیم، از خواندن آن صرف‌نظر نکنید.

به‌جز این، در بندهای بعدی، ابتدا از دنباله و حد و سپس از مفهوم حد به‌طور اساسی صحبت کرده‌ایم. این بندها هم با نشانهٔ (*) مشخص شده‌اند، یعنی خواننده‌ای که تنها برنامهٔ درسی را دنبال می‌کند، می‌تواند از آن‌ها بگذرد و به بندهای بعد از آن‌ها بپردازد. ولی باز هم به خوانندهٔ علاقه‌مند سفارش می‌کنیم، از دقت در این بندها صرف‌نظر نکند، چراکه می‌تواند به‌یاری آن‌ها، به مفهوم واقعی حد پی ببرد و دشواری‌های ذهنی خود را در این باره برطرف کند. مفهوم حد و به‌دنبال آن مفهوم پیوستگی، اساسی‌ترین بخش‌های آنالیز ریاضی را تشکیل می‌دهند و آشنایی دقیق با آن‌ها، برای هر دوستدار ریاضیات ضروری است.

این بخش‌ها را به این مناسبت در این‌جا آورده‌ایم که، خوانندگان کتاب‌های «ریاضیات محاسبه‌ای»، به‌ویژه دانش‌آموزان رشتهٔ ریاضی-فیزیک دست‌کم یک

بار با مفهوم دقیق حد آشنا شوند. باوجود این، در بخش‌های بعدی (که نشانهٔ * را ندارند)، همهٔ این موضوع‌ها به‌صورت شهودی داده شده‌است که برای دانش‌آموزانی که تنها به امتحان خود چشم دوخته‌اند، کافی است، (از §۵ به بعد).

* §۱. آموزش مفهوم حد در دبیرستان

از زمانی که محاسبهٔ محیط و مساحت دایره، حجم جسم‌های دوار و مفهوم عددهای گنگ وارد برنامهٔ ریاضی دبیرستان شد، به‌ناچار به‌همراه آن، داوری دربارهٔ بی‌نهایت کوچک‌ها و روندهای بی‌پایانی که تا بی‌نهایت ادامه دارد، مطرح شد. درضمن در همین دوره روشن شد که درک مفهوم‌های دقیق دانش و استدلالی کردن آن‌ها، جز بر پایهٔ آنالیز ریاضی ممکن نیست. به‌همین مناسبت مفهوم حد و روش‌های حدی که تاریخچه‌ای دراز دارد و برای درک دقیق مفهوم‌های مربوط به آن، دشواری‌هایی پدید می‌آید، خود را وارد کتاب‌های درسی کرد.

ولی از دیرباز، به‌ویژه در رابطه با محاسبهٔ نسبت محیط دایره بر قطر آن (یعنی محاسبهٔ عدد π) و محاسبهٔ سطح و حجم جسم‌های دوار، از مفهوم حد، بدون این‌که نامی از آن برده شود و بدون این‌که قضیه‌های وابسته به آن ثابت شود، استفاده می‌شده است. ارشمیدس که در سدهٔ سوم پیش از میلاد می‌زیست، به‌جای محیط دایره، محیط چندضلعی‌های منتظم محاط در دایره و محیط بر آن را در نظر گرفت و عدد π را به‌تقریب برابر $۳\frac{۱}{۷}$ به‌دست آورد. جمشید کاشانی هم در کتاب «رسالةالمحیطیة» خود، همین راه را دنبال می‌کند. او $۲^n \times ۳$ ضلعی‌های منتظم محاطی و محیطی را در نظر می‌گیرد و می‌گوید، π را باید چنان گرفت که اگر شعاع دایره‌ای ۶۰۰۰۰ برابر شعاع کرهٔ زمین باشد، اختلاف بین محیط‌های چندضلعی‌های محاطی و محیطی، از قطر موی اسب کمتر شود. کاشانی برای این منظور n را برابر ۲۸ می‌گیرد؛ دراین صورت تعداد ضلع‌های چندضلعی‌های محاطی و محیطی

برابر ۸۰۵۳۰۶۳۶۸ می‌شود و عدد π را تا ۱۷ رقم بعد از ممیز محاسبه می‌کند که تنها رقم هفدهم آن نادرست است.

کاشانی، محیط دایره را برابر با میانگین حسابی محیط‌های چندضلعی‌های محاطی و محیطی به‌حساب می‌آورد و، سپس، با تقسیم بر قطر دایره، عدد π را محاسبه می‌کند. روش کاشانی را برای $n = ۰$، $n = ۱$ و $n = ۲$ دنبال کنیم.

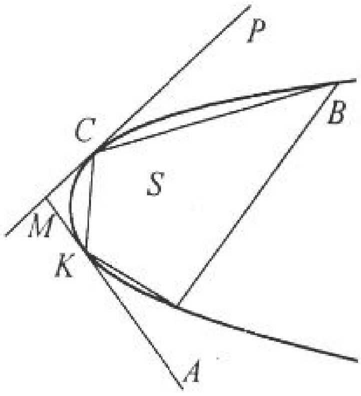
برای $n = ۰$ با مثلث‌های متساوی‌الاضلاع درونی و بیرونی سروکار داریم. اگر شعاع دایره را برابر واحد فرض کنیم، طول ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع محاط در آن برابر $\sqrt{۳}$ یا به‌تقریب ۱/۷۳۲ و ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع محیط بر دایره برابر $۲\sqrt{۳}$ و یا به‌تقریب ۳/۴۶۴ می‌شود. اگر محیط دایره را میانگین حسابی محیط‌های دو مثلث بگیریم:

$$\text{محیط دایره} \approx \frac{۳ \times ۱/۷۳۲ + ۳ \times ۳/۴۶۴}{۲} = ۷/۷۹۴$$

که اگر به‌قطر دایره، یعنی ۲، تقسیم کنیم به عدد ۳/۸۹۷ برای عدد π می‌رسیم که از حقیقت دور است.

برای $n = ۱$ یعنی ۶ضلعی‌های منتظم محاطی و محیطی، محیط ۶ضلعی محاطی برابر ۶ و محیط شش‌ضلعی محیطی برابر ۶/۹۲۸ و محیط دایره به‌تقریب برابر ۶/۴۶۴ به‌دست می‌آید که با تقسیم بر ۲ (قطر دایره) مقدار تقریبی π برابر ۳/۲۳۲ می‌شود که گرچه نسبت به مقدار قبلی دقیق‌تر است، هنوز با π فاصله دارد.

برای $n = ۲$ یعنی ۱۲ضلعی‌های منتظم محاطی و محیطی، میانگین محیط‌های دو چندضلعی برابر ۶/۳۷۰۴ و برای π، عدد ۳/۱۸۵۲ به‌دست می‌آید. می‌بینید هرچه n را بزرگتر کنیم، به مقدار عدد π نزدیک‌تر می‌شویم. ارشمیدس از این هم جلوتر می‌رود و مساحت قطعه سهمی را با همین روش حدی محاسبه می‌کند. ارشمیدس، این محاسبه را در رسالهٔ خود به نام «به مربع در آوردن سهمی» انجام داده است.



روش ارشمیدس را می‌توان به‌صورت کوتاه، این‌طور بیان کرد: فرض کنید بخواهیم مساحت قطعه سهمی AMB را پیدا کنیم، یعنی مساحت شکلی که بین منحنی سهمی و وتر AB واقع است (شکل را ببینید) مماسی بر سهمی رسم می‌کنیم که موازی وتر سهمی باشد و، سپس، از نقطهٔ تماس C به A و B وصل می‌کنیم تا مثلث ACB به‌دست آید. در قطعه سهمی‌های تازهٔ AKC و CPB، همان کاری را دنبال می‌کنیم که در قطعه سهمی AMB انجام دادیم. مجموع مساحت‌های مثلث‌های ACB، AKC و CPB از مساحت قطعه سهمی کمتر است و چهار قطعه سهمی باقی می‌ماند که باید مساحت آن‌ها به مساحت سه مثلث‌ها اضافه شود. در این چهار قطعه سهمی هم، همان عمل قبلی را انجام می‌دهیم و چهار مثلث جدید به‌دست می‌آوریم. اگر این روند را ادامه دهیم، به‌تدریج مجموع مساحت‌های مثلث‌های حاصل، به مساحت قطعه سهمی نزدیک می‌شود و، در حد، مساحت قطعه سهمی را به ما می‌دهد. ارشمیدس ثابت می‌کند، مساحت مثلث ACB چهار برابر مجموع مساحت‌های دو مثلث AKC و CPB است و همین‌طور دربارهٔ مثلث‌های بعدی. به‌این‌ترتیب، ارشمیدس، برای مساحت قطعه سهمی، به‌دست می‌آورد: $S + \frac{۱}{۴}S + \frac{۱}{۱۶}S + \frac{۱}{۶۴}S + \ldots = \frac{۴}{۳}S$ که در آن، S مساحت مثلث ACB است.

همهٔ این کارها بسیار جالب است، ولی از دو جهت دارای کمبود هستند: ۱) چه پیش می‌آید که با در نظر گرفتن بی‌نهایت جمله، به‌نتیجه می‌رسیم؟ در این‌جا کدام خصلت فلسفی و منطقی وجود دارد؟ ۲) در استدلال‌ها دقت منطقی لازم به‌کار نرفته است و در بخشی از کار به معرفت شهودی متوسل شده‌اند. به‌زبان روشن‌تر، قانون‌های حاکم بر این‌گونه عمل‌ها تنظیم نشده بود. برطرف کردن این کمبودها، که بیشتر دارای جنبهٔ فلسفی بود، نیاز به دگرگونی در اندیشهٔ اجتماعی و فلسفی در محیط‌های روشنفکری داشت و این زمینه را انقلاب کبیر فرانسه فراهم کرد. از یک طرف به دقتِ در کار اهمیت داده شد، به‌نحوی که از هیچ مقوله‌ای بدون استدلال و اثبات کامل نگذرند و، از طرف دیگر، دیدگاه نسبت به تغییرهای کمیتی و مکانیکی عوض شد و خود انقلاب آموخت که، هر تغییر کمیتی، در مرحله‌ای از حرکت خود منجر به تغییر کیفی می‌شود و نتیجه‌ای به‌بار می‌آورد که شبیه گذشتهٔ خود نیست.

□

هنوز بسیاری از پژوهشگران و ازجمله، بسیاری از نویسندگان تاریخ ریاضیات، بر این عقیده‌اند که، اندیشهٔ مربوط به نظریهٔ حد، از آغاز سدهٔ نوزدهم میلادی در کتاب‌های درسی دبیرستان وارد شده است. ولی در واقع چنین نیست.

درست است که نماد «lim» یا «حد» در سال ۱۸۵۳، یعنی در نیمهٔ سدهٔ نوزدهم و به‌وسیلهٔ «ویلیام هامیلتون» ریاضی‌دان و فیزیک‌دان ایرلندی وارد در ریاضیات و به‌تدریج معمول شد، ولی خود مفهوم حد، از خیلی پیش از آن در کتاب‌های درسی دبیرستانی مورد استفاده قرار می‌گرفت.

در واقع ژان دالامبر (D'Alember) فیلسوف و ریاضی‌دان فرانسوی (۱۷۱۷_۱۷۸۳ میلادی)، نظریهٔ حد را، که خود در تکامل آن نقش داشت، در کتاب فرهنگ بزرگ خود (دربارهٔ دانش و هنر و پیشه)، که در فاصلهٔ

سال‌های ۱۷۵۱ تا ۱۷۷۱ میلادی در پاریس چاپ شد، تعریف کرد. تعریف دالامبر از مفهوم حد چنین است:

«کمیتی را حد کمیت دیگر گوییم، وقتی که کمیت دوم بتواند به کمیت اول چنان نزدیک شود که فاصله‌اش از آن، از هر مقدار مفروضی، هرقدر کوچک و ناچیز، کمتر باشد. درضمن، کمیت نزدیک‌شونده به‌هیچ‌وجه نباید از کمیتی که به آن نزدیک می‌شود، تجاوز کند. بنابراین، اختلاف بین این کمیت و کمیت حدی آن، مقداری نامعین است».

و روشن است که، این تعریف، مربوط به کمیت‌های صعودی و یکنوا است.

نوشتهٔ دالامبر، از همان زمان انتشار، در کتاب‌های درسی ریاضیات دبیرستانی نفوذ کرد. یکی از این کتاب‌ها، کتاب درسی سیمون لیوویل، برای دبیرستان است.

در تاریخ ریاضیات، نام سیمون لیوویل (S. L'Huilier؛ ۱۷۵۰_۱۸۴۰ میلادی) ریاضی‌دان سویسی، به‌خاطر نتیجه‌گیری‌های دقیق علمی خود، شهرت دارد. بین کارهای او، می‌توان از پایه‌گذاری آنالیز ریاضی بر اساس مفهوم حد نام برد. نوشتهٔ لیوویل باعنوان «طرح مقدماتی محاسبهٔ عالی» که در سال ۱۷۸۶ در برلن چاپ شد، در مسابقه‌ای که از طرف فرهنگستان علوم برلن ترتیب داده شده بود، بهترین شناخته شد. در آن زمان، لاگرانژ ریاضی‌دان فرانسوی (۱۷۳۶_۱۸۱۳) رئیس فرهنگستان علوم برلن بود. فعالیت علمی لیوویل و هم کتاب‌های او با سفارش‌های آموزشی همراه است.

در سال ۱۷۷۳، در لهستان «ادارهٔ آموزش» بنیان گذاشته شد. هدف و برنامهٔ این اداره، فعال کردن آموزش در دبیرستان‌ها بود. در این اداره، بخش کتاب‌خانه ایجاد شد که وظیفه‌اش چاپ کتاب‌های درسی به‌زبان مادری بود. درضمن، مسابقه‌ای برای تنظیم کتاب‌های درسی دبیرستانی ترتیب داده شد. . . . و سیمون لیوویل برندهٔ کتاب‌های درسی ریاضیات دبیرستانی شد. کتاب

او، «مقدمات حساب و هندسه برای دبیرستان‌ها»، در ورشو و در سال ۱۷۷۸ چاپ شد. خود لیوویل به لهستان دعوت شد و در آن‌جا به‌عنوان کتاب‌دار و مربی پسر شاهزاده چِرتوریسکی (که عضو کمیسیون آموزش بود) مشغول به کار شد. خیلی زود، ترجمهٔ لهستانی کتاب لیوویل هم منتشر شد. ترجمهٔ کتاب را آندره هاورونسکی یکی از فعالان تهیهٔ اصطلاح‌های ریاضی در زبان لهستانی به‌عهده گرفت. کتاب درسی حساب در سال ۱۷۷۸ چاپ شد. بعد از دو سال، جلدهای اول و دوم کتاب درسی هندسه و در سال ۱۷۸۲ کتاب درسی جبر چاپ شد. کتاب حساب ۱۲ بار، هندسه‌ها ۴ بار و جبر ۳ بار تجدید چاپ شدند.

در این‌جا، کتاب‌های جبر و هندسهٔ لیوویل را، از دیدگاه روش استفاده از نظریهٔ حد بررسی می‌کنیم. کتاب هندسهٔ او تفاوت‌هایی جدی با دستگاه اقلیدسی دارد. بررسی شکل‌های متشابه، قبل از نسبت‌ها و مثلثات، قبل از لگاریتم آمده است. در جلد دوم از توان سوم و ریشهٔ سوم عددها صحبت شده است. مولف، توجه زیادی به حل مساله‌های عملی کرده است. در فصل ۱۱ جلد اول، مقدمات «زمین‌سنجی» آمده است. در فصل ۱۲، از کاربرد مثلثات در محاسبه‌های مختلف مربوط به زمین گفت‌وگو کرده است.

در کتاب لیوویل، هرجا که توانسته است، از مفهوم حد استفاده شده است. از این دیدگاه، فصل ۱۳ بسیار جالب است. عنوان این فصل چنین است: «به مربع درآوردن دایره یا پیدا کردن مساحت دایره». لیوویل در آغاز می‌گوید: هرچه تعداد ضلع‌های چندضلعی‌های منتظم بیشتر باشد، به دایره شبیه‌تر می‌شوند و نسبت محیط‌های آن‌ها، به نسبت شعاع دایره‌های محاطی و محیطی نزدیک‌تر می‌شود. این قضیه وقتی درست است که، به‌قول لیوویل، «تعداد ضلع‌های چندضلعی‌های منتظم آن‌قدر زیاد باشد که تشخیص آن‌ها از دایره ممکن نباشد. در چنین وضعی، بین شعاع‌های دایره‌های محاطی و محیطی، نمی‌توان تفاوتی قایل شد و در واقع، یک شعاع دارند». این

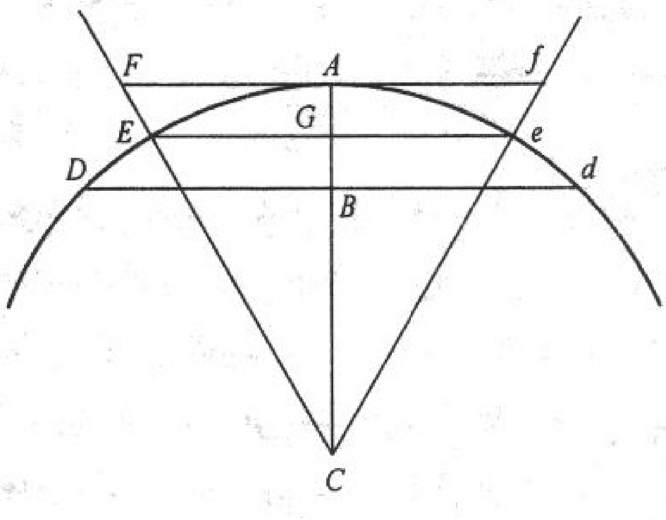
استدلال، برخی هندسه‌دان‌ها را قانع کرد که، اگر اثبات و استدلالی برای چندضلعی منتظم درست باشد، برای دایره هم درست است، به‌شرطی که دایره را همچون چندضلعی منتظمی در نظر بگیرند که، «در آن، تعداد ضلع‌ها، از هر عددی بزرگ‌تر باشد». به‌عقیدهٔ لیوویل، چنین استدلال‌هایی، نمی‌تواند برای دانش‌آموزان قانع‌کننده باشد. «آن‌ها توجه می‌کنند و باید توجه کنند که، در این‌جا، یک پرسش وجود دارد؛ زیرا اگر با دقت ارزیابی کنیم، منحنی را نمی‌توان همچون مجموعه‌ای از تعداد بسیاری پاره‌خط‌های راستِ بسیار کوچک دانست که با هم زاویه می‌سازند». باید مساله را دقیق‌تر مطرح کرد. و این ممکن نیست، مگر به‌یاری مفهوم حد. آن‌چه مربوط به «پرسش»، ضمن عبور از چندضلعی به دایره، می‌شود، ما را وامی‌دارد تا به تصور عمیق‌تری که لیوویل دربارهٔ «عبور» داشته است پی ببریم. در واقع، در این‌جا با تغییری کیفی سروکار داریم که بعد از یک جریان مداوم تغییرهای کمّی پدید آمده است. باید توجه داشت که بسیاری از مولفان کتاب‌های درسی هندسه، از این مفهوم عمیق لیوویل (یعنی تغییر کیفی، در نتیجه یک رشته تغییرهای کمّی) استفاده نکرده‌اند.

لیوویل، طرح خود را با یک پیش قضیه آغاز می‌کند: «همیشه می‌توان، ولو در ذهن، یک کمیت را به چنان بخش‌های برابر تقسیم کرد که، هرکدام از آن‌ها به‌تنهایی، از هر کمیت شناخته‌شده‌ای، کوچک‌تر باشد». لیوویل، این کمیت را کمیت مفروض می‌نامد. فرض کنید بخواهیم کمیت A را چنان به بخش‌های برابر تقسیم کنیم که، هرکدام از آن‌ها، از کمیت مفروض α کوچک‌تر باشد. عددی پیدا می‌کنیم، که از ضرب آن در α عددی بزرگتر از A به‌دست آید. فرض کنید، این عدد n باشد، یعنی $n\alpha > A$. اگر دو طرف این نابرابری را بر n تقسیم کنیم، به‌دست می‌آید: $\frac{A}{n} < \alpha$. همان‌که می‌خواستیم.

برای مثال، فرض کنید کمیتی را به دو بخش برابر تقسیم کنیم، هر بخش

را دوباره به دو بخش و غیره؛ و از این راه به بخشی برسیم که از هر مقدار مفروضی که در نظر گرفته‌ایم، کمتر باشد. مولف، معلم را راهنمایی می‌کند که توجه دانش‌آموز را به این مقدار مفروض (که آن را کمیت نشان شده می‌نامد) جلب کند. این یادآوری مولف برای ما اهمیت دارد، زیرا به درک امروزی ما از مفهوم حد (که نقش مقدار مفروض را به ε می‌دهیم) بسیار نزدیک است.

سپس مولف، این قضیه را تنظیم و اثبات می‌کند: «می‌توان دو چندضلعی منتظم متشابه، یکی را بر دایره محیط و دیگری را در دایره محاط کرد، به‌نحوی که اختلاف محیط‌های آن‌ها، از هر عددی که از قبل نشان شده است، کمتر باشد. مثلاً می‌توان چندضلعی‌های منتظم محیطی و محاطی را طوری انتخاب کرد که اختلاف محیط‌های آن‌ها، از $\frac{1}{10}$ محیط هریک از چندضلعی‌ها کمتر باشد». و آن را به این ترتیب ثابت می‌کند:



فرض کنید، شعاع دایره را به ۱۰ بخش برابر تقسیم کنیم و AB یکی از این بخش‌ها باشد. از نقطهٔ B عمودی بر شعاع رسم می‌کنیم تا محیط دایره را در D و d قطع کند. سپس محیط دایره را به ۲، ۴، ۸، ۱۶، ... بخش برابر تقسیم می‌کنیم تا جایی که هر بخش، از کمان DAd کوچکتر شود. فرض کنید، کمان EAe یکی از این بخش‌ها باشد و فرض کنید $\widehat{EA}=\widehat{Ae}$.

پاره‌خط راست Ee را رسم می‌کنیم که البته، بر AC عمود می‌شود. CE و Ce را ادامه می‌دهیم تا مماس بر دایره در نقطهٔ A را در نقطه‌های F و f قطع کند. در این صورت، Ee و Ff عبارتند از ضلع‌های چندضلعی‌های منتظم متشابه که اولی در دایره محاط و دومی بر دایره محیط است. محیط این چندضلعی‌ها را p و P می‌نامیم، در این صورت

$$\frac{p}{P}=\frac{|CG|}{|AC|}\Rightarrow\frac{P-p}{P}=\frac{|AC|-|CG|}{|AC|}$$

و $|AC|-|CG|=|AG|$. ولی

$$|AG|<|AB|=\frac{1}{10}|AC|$$

بنابراین

$$\frac{P-p}{P}<\frac{1}{10}\Rightarrow P-p<\frac{1}{10}P$$

به‌همین ترتیب ثابت می‌شود: $P-p<\frac{1}{10}p$.

مولف در یادداشت خود می‌گوید: مثال عددی را به این دلیل آوردم که دانش‌آموزان مطلب را بهتر درک کنند. ولی این مثال نمی‌تواند اثباتی کلی و دقیق به‌حساب آید، زیرا استدلال نباید به عدد نشان شده (در این مثال، عدد $\frac{1}{10}$) بستگی داشته باشد، سپس دو نتیجه، از این قضیه به‌دست می‌آورد:

۱. می‌توان دو چندضلعی منتظم متشابه، یکی محاط در دایره و دیگری محیط بر دایره چنان رسم کرد که، اختلاف محیط دایره با محیط هریک از آن‌ها، از هر عدد نشان شدهٔ قبلی کوچکتر باشد. l را محیط دایره بگیرید و فرض کنید:

$$P-p<\frac{1}{10}p,\ P-l<P-p;$$

یعنی $P - l < \frac{1}{10}p$. ولی $l > p$، پس $P - l < \frac{1}{10}l$.

۲. فرض کنیم، محیط دایره را به‌صورت یک پاره‌خط راست نشان داده باشیم. می‌توان در دایره یک چندضلعی منتظم محاط و چندضلعی متشابه آن را بر دایره محیط کرد، به‌نحوی که، اختلاف محیط دایره با محیط هریک از چندضلعی‌ها، از طول پاره‌خط راستی که به‌اندازهٔ کافی کوچک باشد، کمتر شود.

α را پاره‌خطی راست با طولی به‌دلخواه کوچک، می‌گیریم، $|AB| = l$. فرض کنید:

$$10\alpha > |AB|; \quad \alpha > \frac{|AB|}{10} = \frac{l}{10}$$

اگر دو چندضلعی منتظم متشابه یکی محاط در دایره و دیگری محیط بر دایره رسم کنیم، به‌نحوی که داشته باشیم: $P - p < \frac{1}{10}p$، آن‌وقت خواهیم داشت: $P - l < \frac{1}{10}p$ و به‌طور مسلم $P - l < \frac{1}{10}|AB| = \frac{1}{10}l$.

ولی $\alpha > \frac{1}{10}l$، بنابراین $P - l < \alpha$.

وقتی تعداد ضلع‌های چندضلعی‌های منتظم را، ۲برابر، ۴برابر، ... کنیم، محیط چندضلعی محیطی کوچکتر و محیط چندضلعی محاطی بزرگتر می‌شود، ولی محیط دایره مقداری ثابت است. بنابراین اختلاف محیط دایره با محیط هریک از چندضلعی‌ها را می‌توان از هر عدد α، که از قبل و به‌اندازهٔ کافی کوچک انتخاب شده است، کوچکتر گرفت. به این ترتیب، محیط دایره، برابر است با حد محیط‌های چندضلعی‌های محاطی و محیطی، به‌شرطی که تعداد ضلع‌های آن‌ها، پشت‌سرهم دوبرابر شود.

بعد مولف قضیهٔ دوم را ثابت می‌کند: نسبت محیط‌های دو دایره، مثل نسبت شعاع‌های آن‌هاست. و از آن‌دو نتیجه می‌گیرد:

۱. نسبت محیط دایره به شعاع آن، مقدار ثابتی است که به‌اندازهٔ محیط دایره بستگی ندارد.

۲. نسبت مساحت‌های دو مثلث راست گوشه‌ای که ارتفاع آن‌ها برابر شعاع دو دایره و قاعده‌های آن‌ها، پاره‌خط‌های راستی با طول محیط‌های دو دایره باشد، برابر است با نسبت مجذورهای دو شعاع.

قضیه. مساحت دایره، برابر است با مساحت مثلثی که ارتفاع آن برابر با طول شعاع دایره و قاعدهٔ آن، طولی برابر محیط دایره داشته باشد.

اگر مساحت دایره، برابر مساحت این مثلث نباشد، باید از آن بزرگتر یا از آن کوچکتر شود؛ یعنی مساحت دایره برابر با مساحت مثلثی می‌شود که ارتفاع آن طولی برابر با شعاع دایره و قاعده‌اش طولی بزرگتر یا کوچکتر از محیط دایره داشته باشد. فرض کنید، طول محیط دایره برابر O و L طول پاره‌خط راستی باشد، بزرگتر یا کوچکتر از محیط دایره. فرض کنید، O کوچکتر از L باشد. چندضلعی منتظم محیطی را در نظر می‌گیریم که اختلاف محیط آن با محیط دایره، کوچکتر از اختلاف محیط دایره از L باشد:

$$P - O < L - O$$

یعنی $L > P$. و این به‌معنای آن است که مساحت چندضلعی محیطی کوچکتر از مساحت دایره‌ای است که در آن محاط شده است. و این، ممکن نیست.

اگر محیط دایره بزرگتر از طول پاره‌خط راست L باشد، در دایره چندضلعی منتظمی محاط می‌کنیم که اختلاف محیط آن با محیط دایره، کمتر از اختلاف محیط دایره از L باشد. در این صورت

$$O - p < O - L \Rightarrow p > L$$

یعنی مساحت چندضلعی محاط در دایره بیشتر از مساحت دایره می‌شود، که ممکن نیست.

به‌این ترتیب، مساحت دایره از مساحت مثلثی که ارتفاع آن برابر شعاع دایره و قاعده‌اش برابر محیط دایره باشد، نه بزرگتر است و نه کوچکتر، یعنی مساحت آن با مساحت دایره برابر است.

در این‌جا، استدلال لیوویل، اختلاف کمی با استدلال ارشمیدس در کتاب «اندازه‌گیری دایره» و استدلال جمشید کاشانی در «رسالةالمحیطیه» دارد.

لیوویل، حجم استوانه، مخروط و کره را به‌عنوان حجم منشور، هرم و چندوجهی منتظمی که در آن‌ها محاط یا بر آن‌ها محیط شده باشد، به‌دست می‌آورد.

در سال ۱۷۹۸ کتاب «تجربه‌هایی دربارهٔ تکمیل مقدمات هندسه» تالیف س.ا. گوریه‌وا منتشر شد. این کتاب هم بر پایهٔ مفهوم حد و روش حدی تنظیم شده‌بود. ماهمیت استدلال‌های گوریه‌وا، با استدلال‌های لیوویل، چندان تفاوتی ندارد، ولی به‌هرحال با آن متفاوت است.

لیوویل و گوریه‌وا، برای حل بسیاری از مساله‌ها، از این قضیه استفاده می‌کنند که: اگر مقدار ثابت A، بین دو مقدار متغیر x و y باشد: $x < A < y$، و اختلاف بین x و y را بتوان از هر مقدار به‌دلخواه کوچکی (که از قبل معین شده است) کمتر کرد، آن‌وقت مقدار ثابت A برابر است با حد مشترک x و y:

$$\text{حد}\, x = \text{حد}\, y = A$$

لازم به یادآوری است که هواداران روش حدی، یعنی لیوویل و گوریه‌وا، به آموزش هندسه با دو دید مختلف می‌نگریستند. گوریه‌وا، هندسه را دانشی مستقل از حساب و جبر می‌دانست و به‌کار بردن حساب و جبر را در آن ضروری نمی‌دید. او می‌نویسد: «. . . در هندسهٔ مقدماتی، به‌هیچ وجه نباید از ریاضیات محاسبه‌ای استفاده کرد . . .».

لیوویل، برعکس، هوادار محکم کردن بستگی بین رشته‌های مختلف ریاضیات بود و در هندسه، به‌فراوانی از حساب و جبر استفاده می‌کرد.

جلد اول کتاب درسی جبر او شامل ۸ فصل است که در آن‌ها، معادله‌های درجه اول یک یا چندمجهولی را بررسی کرده است؛ همچنین ریشه گرفتن، کمیت‌های اندازه‌ناپذیر، معادله‌های درجه دوم و اندکی معادله‌های دیوفانتی، در آن مطرح شده است. در ۱۴ فصل جلد دوم، به تصاعدهای عددی، عددهای چندضلعی، ترکیب و تبدیل، بسط دوجمله‌ای با توان طبیعی، تصاعد هندسی و لگاریتم، روش ضریب‌های نامعین، کسرهای مسلسل، تشکیل معادله با در دست داشتن ریشه‌های آن در معادله‌های درجه سوم و درجه چهارم آمده است. در این‌جا هم، لیوویل، مثل کتاب هندسهٔ خود از روش حدی استفاده می‌کند و ضمن طرح $\frac{۱}{۰}$ و $\frac{۰}{۰}$ می‌نویسد: «به‌نظر من، همهٔ دشواری، مربوط به اندیشهٔ تقسیم است». لیوویل، تعریف حد را، ضمن محاسبهٔ حد کسرها می‌دهد. او می‌نویسد: «وقتی اختلاف دو کمیت، معین یا مفروض باشد، نسبت آن‌ها برابر واحد نمی‌شود. ولی هرقدر این اختلاف، نسبت به هریک از دو عدد، کمتر باشد و هرقدر خود دو عدد بزرگتر باشند، نسبت آن‌ها به واحد نزدیکتر می‌شود و اختلاف این نسبت با واحد، می‌تواند از هر عدد کوچک دلخواه، کمتر باشد. در این صورت، عدد ۱، حد این نسبت است».

در فصل عددهای چندضلعی، حد نسبت $\frac{۲n+۱}{n+۲}$ را بررسی می‌کند. او این نسبت را به‌صورت $۲ - \frac{۳}{n+۲}$ نشان می‌دهد و، سپس، به‌سمت مقدار حدی می‌رود:

$$\text{حد}\left(۲ - \frac{۳}{n+۲}\right) = ۲$$

او برای محاسبهٔ مجموع همهٔ جمله‌های یک تصاعد هندسی نزولی (که بی‌نهایت جمله دارد)، از همین روش استفاده می‌کند. لیوویل با در دست داشتن

$$S = \frac{۱ - a^n}{۱ - a}$$

می‌نویسد: $S=\frac{۱}{۱-a}-\frac{a^n}{۱-a}$ و نشان می‌دهد که، برای $۰ < a < ۱$، کسر دوم با بزرگ شدن n، کوچک می‌شود و می‌تواند از هر مقدار کوچک دلخواهِ از قبل تعیین‌شده‌ای، کوچکتر باشد. بنابراین

$$\frac{۱}{۱-a}$$

حد مجموع همهٔ جمله‌های تصاعد هندسی نزولی است.

لیوویل، با استفاده از مجموع جمله‌های تصاعد نزولی، مجموع جمله‌های چند رشته را محاسبه می‌کند. ازجمله

$$S' = ۱ + ۲x + ۳x^۲ + ۴x^۳ + \dots$$
$$\dots + (n-۱)x^{n-۲} + nx^{n-۱} \qquad (۱)$$

دو طرف برابری (۱) را در x ضرب می‌کند:

$$S'x = x + ۲x^۲ + ۳x^۳ + ۴x^۴ + \dots$$
$$\dots + (n-۱)x^{n-۱} + nx^n \qquad (۲)$$

سپس، با کم کردن (۲) از (۱) به‌دست می‌آورد:

$$S'(۱-x) = \left(۱ + x + x^۲ + \dots + x^{n-۱}\right) - nx^n =$$
$$= \frac{۱-x^n}{۱-x} - nx^n$$

از آن‌جا

$$S' = \frac{۱-x^n}{(۱-x)^۲} - \frac{nx^n}{۱-x} = \frac{۱}{(۱-x)^۲} - \frac{x^n}{(۱-x)^۲} - \frac{nx^n}{۱-x}$$

اگر $x < 1$، آن‌وقت کسرهای $\frac{nx^n}{1-x}$ و $\frac{x^n}{(1-x)^2}$، با بزرگ شدن n، کوچک می‌شوند، به‌نحوی که می‌توان n را طوری انتخاب کرد که، این دو کسر، از هر عدد کوچک ازپیش تعیین شده‌ای، کوچکتر باشند. بنابراین برای حد مجموع داریم:

$$S' = \frac{1}{(1-x)^2}$$

با استفاده از این نتیجه، و با همان روش می‌توان حد مجموع

$$S'' = 1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + \dots \\ \dots + \frac{n}{1} \cdot \frac{n+1}{2} x^{n-1}$$

را به‌دست آورد که برابر است با $\frac{2}{(1-x)^3}$

در واقع S' و S'' نتیجه‌ای از مشتق S نسبت به x هستند. (فصل بعد را ببینید).

به‌این ترتیب می‌بینیم، در کتاب درسی جبر و هندسه که لیوویل نوشته است، به‌طور منظم و پشت‌سرهم از مفهوم حد استفاده شده‌است. کارهای لیوویل و کوریه‌وا، بسیاری از دانش‌آموزان و معلمان را تربیت کرد. لیوویل، با وارد کردن اندیشهٔ تازه‌ای در کتاب‌های درسی و حل بسیاری از مساله‌های عملی، جای نمایانی در دگرگون کردن کتاب‌های درسی دبیرستانی دارد. اندیشه‌های او در واقع آغازی برای پایه‌گذاری آنالیز ریاضی شد.

* §۲. دنباله و حد آن

۱. دنبالهٔ عددی، به‌عنوان تابعِ متغیر طبیعی. مجموعهٔ عددهای طبیعی، یک ویژگی جالب دارد: ویژگی ترتیبی برای هر دو عدد طبیعی a و b. یکی از

این دو حکم درست است: یا a کوچکتر یا برابر b است، و یا b کوچکتر یا برابر a است. این ویژگی مجموعهٔ $\mathbf{N}$ به ما امکان می‌دهد، چیزهای ملموس و یا انتزاعی را که در دنباله‌ای، به‌نحوی دلخواه مرتب شده‌اند، «شماره‌گذاری» کنیم.

به‌این‌ترتیب، می‌توانیم تابعِ روی مجموعهٔ $\mathbf{N}$ را تعریف کنیم:

$$\mathbf{N} \underset{n}{\overset{f}{\longrightarrow}} A \qquad (1)$$

که تعریف دنبالهٔ عضوهای A در رابطه با مجموعهٔ $\mathbf{N}$ است. درضمن، روشن است که مجموعهٔ A می‌تواند شامل هرگونه عضوی باشد، ولی باید هر عضو دنبالهٔ A متناظر با عدد معین n از مجموعهٔ $\mathbf{N}$ باشد و برعکس، برای هر $n \in \mathbf{N}$، عضوی مثل $a \in A$ مشخص شود. بستگی بین عضوهای مجموعهٔ $\mathbf{N}$ با مجموعهٔ A ممکن است یک‌به‌یک نباشد؛ هر عضو A ممکن است متناظر با چند عضو $\mathbf{N}$ باشد.

هر مقدار تابع (۱) را (یعنی هر عضو دنباله را)، به‌طور معمول با حرف کوچک لاتینی نشان می‌دهند که همراه با عددی در زیر و سمت راست آن نوشته می‌شود و معرف عضوی از $\mathbf{N}$ است:

$$a_1 = f(1), \quad a_2 = f(2), \ldots, \quad a_n = f(n), \ldots$$

و یا

$$\{a_n\} = a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots \qquad (2)$$

درضمن a_n را، جملهٔ عمومی دنباله (۲) گویند.

یادآوری می‌کنیم که لزومی ندارد، همهٔ جمله‌های دنبالهٔ (۲)، با هم متفاوت باشند. تعداد جمله‌های مختلف یک دنباله، می‌تواند محدود یا نامحدود باشد. ولی در حالت نامحدود بودن تعدادجمله‌های دنباله، به‌شرط

شمارا بودن آن‌ها ضروری است، یعنی باید بتوان هر جملهٔ دنباله را به یک عدد طبیعی بستگی داد.

به‌این‌ترتیب، مجموعه‌ای از عضوها می‌تواند یک دنباله باشد که، با در دست داشتن هر $n \in \mathbf{N}$، بتوان عضو $a \in A$ را، که متناظر با آن است پیدا کرد. دو دنبالهٔ

$$\{a_n\} = a_۱, a_۲, \ldots, a_n, \ldots \quad و \quad \{b_n\} = b_۱, b_۲, \ldots, b_n, \ldots$$

را برابر گوییم، وقتی که برای هر $n \in \mathbf{N}$ داشته باشیم: $a_n = b_n$، یعنی برابری $a_n = b_n$ نسبت به n، یک اتحاد باشد.

تصاعدهای عددی و هندسی، به‌شرطی که تعداد جمله‌های آن‌ها نامحدود باشد، نمونه‌هایی از دنباله هستند. به‌جز آن، در زیر چند نمونهٔ دنبالهٔ عددی داده شده است:

$$۱) \quad ۳, ۵, ۷, ۱۱, ۱۳, ۱۷, ۱۹, ۲۳, \ldots$$

این، دنبالهٔ عددهای اول است. برای این دنباله نتوانسته‌اند جملهٔ عمومی را پیدا کنند، یعنی با در دست داشتن شمارهٔ جمله، نمی‌توان بلافاصله، آن را پیدا کرد. ولی به‌یاری غربال اِراتوستن و یا امروز به‌یاری برنامه‌ریزی رایانه‌ای می‌توان عددهای اول را تا هر جمله‌ای پیدا کرد. به‌عنوان مثال، اگر جملهٔ nام دنبالهٔ عددهای اول را U_n بنامیم، داریم:

$$U_{۲۶} = ۱۰۱, \quad U_{۴۵} = ۱۹۷, \quad U_{۲۰۰} = ۱۲۲۳,$$
$$U_{۵۰۰} = ۳۶۰۷, \quad U_{۷۷۲} = ۵۹۸۷$$

بنابراین، تناظر بین $n \in \mathbf{N}$ و جمله‌های دنبالهٔ $\{U_n\}$ برقرار است.

$$۲) \quad \frac{۳}{۷}, \frac{۵}{۹}, \frac{۷}{۱۱}, \frac{۹}{۱۳}, \ldots, \frac{۲n+۱}{۲n+۵}, \ldots$$

در این‌جا جملهٔ عمومی معلوم است. مثلاً برای پیدا کردن جمله صدم این دنباله داریم:

$$u_{۱۰۰} = \frac{۲ \times ۱۰۰ + ۱}{۲ \times ۱۰۰ + ۵} = \frac{۲۰۱}{۲۰۵}$$

۳) $۶, ۰, ۹, -۴, -۶, -۶, -۴, ۰, ۶, ۱۴, ۲۴, \ldots, n^۲ - ۹n + ۱۴, \ldots$

همان‌طور که می‌بینیم، در این دنباله، همهٔ جمله‌ها مختلف نیستند و بعضی از جمله‌ها با هم برابرند:

$$u_۱ = u_۸ = ۶, \quad u_۲ = u_۷ = ۰, \ldots$$

۲. حد دنبالهٔ عددی. تصور شهودی دربارهٔ حد، به‌نحوی با تصور دربارهٔ نوعی «حرکت» بستگی دارد. وقتی در مجموعهٔ مرتب $\mathbf{N}$ پیش می‌رویم، با رفتار جمله‌های دنبالهٔ $\{a_n\}$ آشنا می‌شویم. این رفتار جمله‌ها، گاهی چنین است که، هرچه شمارهٔ جمله را زیاد کنیم، مرتب به عددی مثل a نزدیک‌تر می‌شود. با شرطهایی که هم‌اکنون آشنا خواهیم‌شد، این عدد a می‌تواند حد دنبالهٔ مفروض $\{a_n\}$ باشد.

با این‌که، این تصور تا حد زیادی طبیعی است، چون با ریاضیات سروکار داریم، باید روند این تصور را با دقت ریاضی تنظیم کنیم. فرض می‌کنیم، جمله‌های یک دنباله، به‌طور پیوسته مرتب به عدد a نزدیک شوند. در این‌جا پرسشی پیش می‌آید: نزدیکی جمله‌های دنباله به عدد a چگونه است و این نزدیکی را چگونه می‌توان تشخیص داد؟

دنبالهٔ با جملهٔ عمومی $a_n = \frac{۱}{n}$ را در نظر می‌گیریم:

$$۱, \frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۳}, \frac{۱}{۴}, \ldots, \frac{۱}{n}, \ldots \qquad (۳)$$

اگر به‌طور مرتب n را بزرگ کنیم، جمله‌های دنباله کوچک و کوچکتر می‌شوند، یعنی اختلاف آن‌ها از صفر، به‌طور دایم و پیوسته، کمتر می‌شود.

در واقع، در این دنباله، با آغاز از جمله دهم، بقیهٔ جمله‌ها از ۰/۱ و همهٔ جمله‌های بعد از جملهٔ ده‌هزارم، از ۰/۰۰۰۱ کوچکترند و غیره.

جمله‌های دنبالهٔ (۳) را، روی یک محور، به‌وسیلهٔ نقطه‌ها نشان می‌دهیم (شکل ۵). به‌سادگی دیده می‌شود که نقطه‌های متناظر با دنبالهٔ (۳)، در روی محور، مرتب به‌سمت نقطهٔ O (که نمایندهٔ ۰ است) کشیده می‌شوند.



شکل ۵

ε را عدد دلخواه مثبتی می‌گیریم. روی محور عددی، فاصله‌ای متقارن به مرکز O و طول 2ε انتخاب می‌کنیم، یعنی فاصلهٔ $(-\varepsilon, \varepsilon)$. اگر $\varepsilon = 2$ فرض کنیم، همهٔ جمله‌های دنبالهٔ ما در درون این فاصله واقع می‌شوند. ولی اگر فرض کنیم $\varepsilon = 0/2$، آن‌وقت بعضی از جمله‌های نخستینِ دنباله، یعنی

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$$

در بیرون فاصلهٔ $(-0/2, 0/2)$ و بقیهٔ یعنی

$$\frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \dots$$

در درون این فاصله قرار می‌گیرند. اکنون ε را خیلی کوچکتر و برابر ۰/۰۰۰۱ می‌گیریم. به‌روشنی معلوم می‌شود که تنها ۱۰۰۰۰ جملهٔ اول دنباله در بیرون فاصلهٔ $(-0/0001, 0/0001)$ و بقیهٔ بی‌نهایت جملهٔ دنباله، یعنی از جملهٔ a_{10001} به بعد، در درون این فاصله واقع‌اند. روشن است که، این استدلال، برای هر ε (هرقدر که کوچک باشد) درست است. به‌این‌ترتیب، ε هرچه باشد، همیشه می‌توان عدد طبیعی N را چنان پیدا کرد که همهٔ

جمله‌های دنباله، که برای آنها $n \geq N$ است، در درون فاصلهٔ $(-\varepsilon, \varepsilon)$ قرار گیرند و تنها تعداد محدودی از جمله‌ها، یعنی

$$a_۱, a_۲, \ldots, a_{N-۱}$$

در بیرون این فاصله باشند.

در این استدلال به دو نکته توجه کنیم: **اول**: طول فاصلهٔ انتخابی دلخواه است. **دوم**: باتوجه به طول فاصلهٔ انتخابی، یعنی وقتی ε معلوم باشد، می‌توان عدد N را پیدا کرد، به‌نحوی که همهٔ جمله‌های دنباله، که شماره‌ای بزرگتر از N دارند، در درون فاصلهٔ $(-\varepsilon, \varepsilon)$ قرار گیرند.

اکنون دیگر می‌توانیم **تعریف حد دنباله** را بدهیم.

عدد a را حد دنبالهٔ $\{a_n\}$ گویند، وقتی که برای هر عدد دلخواه مثبت ε، بتوان عددی مانند N پیدا کرد، به‌نحوی که به‌ازای همهٔ مقدارهای $n \geq N$، داشته باشیم:

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

وقتی دنباله‌ای حدی برابر a داشته باشد (یعنی جمله‌های آن به‌سمت a میل کنند)، به‌این‌صورت نشان داده می‌شود:

$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\, a_n = a$$

مثال ۱. حد دنبالهٔ با جملهٔ عمومی $\frac{۱}{n}$ را پیدا کنید.

حل. داریم $a_n = \frac{۱}{n}$، باید $\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\, a_n$ را به‌دست آوریم. از آن‌چه گفتیم، می‌توان حدس زد که حد این دنباله، باید برابر صفر باشد. ولی این حدس، اثبات می‌خواهد. باید ثابت کنیم، به‌ازای هر $\varepsilon > ۰$، می‌توان عدد N را (که البته بستگی به مقدار ε دارد) طوری پیدا کرد که، به‌ازای هر $n \geq N$،

داشته باشیم:

$$\left|\frac{۱}{n} - ۰\right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{۱}{n} < \varepsilon$$

که از آن‌جا به‌دست می‌آید $n > \frac{۱}{\varepsilon}$.

دراین‌صورت با فرض ۱ + $N = \left[\frac{۱}{\varepsilon}\right]$[1]، معلوم می‌شود که برای هر $\varepsilon > ۰$، می‌توانیم مطمئن باشیم که برای

$$n \geq N = \left[\frac{۱}{\varepsilon}\right] + ۱$$

نابرابری $\left|\frac{۱}{n} - ۰\right| < \varepsilon$ برقرار است، یعنی می‌توانیم شماره‌ای از جمله‌های دنباله را پیدا کنیم (N)، به‌نحوی که جمله‌های با شماره‌های بزرگتر از N، همگی در درون فاصلهٔ $(-\varepsilon, \varepsilon)$ قرار گرفته باشند:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{۱}{n} = ۰$$

با بررسی رفتار جمله‌های دنباله، وقتی مرتب و به‌صورتی بی‌پایان پیش برویم، می‌توانیم استدلالی پیدا کنیم و به‌یاری آن قانع شویم که دنبالهٔ $\{a_n\}$ به‌سمت حدی مثل a میل می‌کند. باوجود این، برای تکمیل استدلال، باید ثابت کنیم، دنبالهٔ $\{a_n\}$ به‌سمت عدد دیگری مثل b میل نمی‌کند. این حکم را، به‌صورت نمادین، این‌طور نشان می‌دهند:

$$\lim_{n\to\infty} a_n \neq b$$

روشن است که، این حکم، عکس حکم «مستقیم» است و، بنابراین روش اثبات آن، باتوجه به قضیهٔ مستقیم به‌دست می‌آید. به‌این‌ترتیب، باید ثابت

[1]. منظور از $[A]$، بخش درست عدد A است.

کنیم: عدد b وقتی حد دنبالهٔ $\{a_n\}$ نیست که بتوان عدد مثبت ε را طوری پیدا کرد که برای هر عدد N، شماره‌ای مثل $n \geq N$ وجود دارد که، برای هر شمارهٔ n، این نابرابری برقرار است:

$$|a_n - b| \geq \varepsilon$$

مثال ۲. ثابت‌کنید، حد دنبالهٔ $\{a_n\}$ برابر ۱ نیست: $\lim_{n\to\infty}\{a_n\} \neq 1$.

حل. $\varepsilon = \frac{1}{2}$ می‌گیریم. روشن می‌شود که برای هر $n > 2$ داریم:

$$\left|\frac{1}{n} - 1\right| > \frac{1}{2} \qquad (4)$$

بنابراین، برای هر N می‌توانیم n را طوری انتخاب کنیم که نابرابری (۴) برقرار باشد؛ به‌ویژه اگر $N > 2$، آن‌وقت کافی است فرض کنیم $n = N$. بنابراین $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \neq 1$

اگر دنبالهٔ $\{a_n\}$ دارای حدی محدود و معین باشد، دنباله را **همگرا** (یا متقارب) گویند. همچنین می‌توان گفت که، دراین‌حالت، دنباله به‌سمت a میل می‌کند.

این مطلب روشن است: اگر دنبالهٔ $\{a_n\}$، حد محدودی مثل a داشته باشد، خود دنباله محدود است، یعنی عددی مثل M وجود دارد که، به‌ازای هر n، داشته باشیم:

$$|a_n| \leq M \qquad (5)$$

درواقع، این حکم نتیجه‌ای از این حکم است که، برای هر $\varepsilon > 0$، تنها تعداد محدودی برابر $N(\varepsilon) - 1$[1] جملهٔ دنبالهٔ $\{a_n\}$ در بیرون بازهٔ $(-\varepsilon, \varepsilon)$ قرار می‌گیرد، به‌نحوی که همهٔ این جمله‌ها ازلحاظ قدرمطلق نمی‌توانند از عددی

۱. N را به‌صورت $N(\varepsilon)$ می‌نویسیم، زیرا مقدار N بستگی به مقدار ε دارد.

مثل $M_{1} > 0$ تجاوز کنند و برای بقیهٔ جمله‌های دنبالهٔ $\{a_n\}$ داریم، برای هر $n \geq N(\varepsilon)$:

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

بنابراین، برای هر $n \geq N(\varepsilon)$

$$|a_n| = |a + a_n - a| \leq |a| + |a_n - a| \leq |a| + \varepsilon$$

به‌نحوی که برای هر $n \geq N(\varepsilon)$:

$$|a_n| \leq |a| + \varepsilon$$

اکنون کافی است انتخاب کنیم[1] :

$$M = \max(M_{1}, |a| + \varepsilon) \qquad (6)$$

که به‌معنای درستی نابرابری (۵) است.

نباید گمان کرد که، هر دنباله‌ای، دارای حد است. حتا دنباله‌هایی هستند که باوجود محدود و معین بودن همهٔ جمله‌های آن‌ها، حدی ندارند. مثلاً دنبالهٔ با جملهٔ عمومی

$$a_n = (-1)^n$$

دارای حد نیست، باوجودی که برای همهٔ جمله‌های آن داریم $|a_n| \leq 1$: بی‌نهایت جمله برابر ۱− و بی‌نهایت جمله برابر ۱ وجود دارد.

□

۱. $\max(A, B)$، یعنی بزرگترین عدد از بین دو عدد A و B.

تا این‌جا دربارهٔ حد a، که عدد معین و محدودی است، صحبت کردیم.
اکنون به مفهوم حد «بی‌نهایت» می‌پردازیم. گوییم، حد دنبالهٔ $\{a_n\}$ بی‌نهایتِ مثبت است $(a_n \to +\infty)$، وقتی که برای هر $E > ۰$، عددی مثل $N = N(E)$ وجود داشته باشد، به‌نحوی که برای هر $n \geq N$ داشته باشیم $a_n > E$.

به‌همین ترتیب، دنبالهٔ $\{a_n\}$ دارای حد $-\infty$ است $(a_n \to -\infty)$، وقتی که برای هر $E > ۰$، عددی مثل $N = N(E)$ وجود داشته باشد، به‌نحوی‌که، برای هر $n \geq N$ داشته باشیم $a_n < -E$.

به‌عنوان مثال، می‌توان دنبالهٔ با جملهٔ عمومی $a_n = n^۲$ را در نظر گرفت که دارای حد $+\infty$ است. در واقع اگر E را عدد دلخواه مثبتی فرض کنیم، نابرابری $n^۲ > E$ برای هر $n \geq N = [E] + ۱$ برقرار است.

به‌همین ترتیب، دنبالهٔ با جملهٔ عمومی $a_n = -n^۲$ دارای حد $-\infty$ است.

۳. یگانه بودن حد یک دنباله. در این‌جا می‌خواهیم به این پرسش پاسخ بدهیم: آیا یک دنباله، می‌تواند دو یا چند حد مختلف داشته باشد؟ برای این منظور، قضیه‌ای را ثابت می‌کنیم.

قضیه. اگر دنباله $\{a_n\}$ حدی داشته‌باشد، این حد یگانه است.

اثبات. از برهان خُلف استفاده می‌کنیم. فرض کنید:

$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\, a_n = x_۱, \quad \underset{n\to\infty}{\text{حد}}\, a_n = x_۲, \quad (x_۱ \neq x_۲) \qquad (۷)$$

عدد دلخواه $\varepsilon > ۰$ را انتخاب می‌کنیم. باید عددی مثل $N_۱ = N_۱(\varepsilon)$ وجود داشته باشد که، برای هر $n \geq N_۱$، داشته‌باشیم $|a_n - x_۱| < \varepsilon$. همچنین باید عدد $N_۲ = N_۲(\varepsilon)$ وجود داشته باشد که، برای هر $n \geq N_۲$، داشته باشیم: $|a_n - x_۲| < \varepsilon$. اکنون انتخاب می‌کنیم:

$$N = \max(N_۱, N_۲)$$

دراین‌صورت، برای هر $n \geq N$ باید داشته باشیم:

$$|a_n - x_۱| < \varepsilon \text{ و } |a_n - x_۲| < \varepsilon$$

از آن‌جا

$$|x_۱ - x_۲| = |(x_۱ - a_n) + (a_n - x_۲)| \leq$$
$$\leq |x_۱ - a_n| + |a_n - x_۲| < ۲\varepsilon$$

که بافرض $\frac{|x_۱ - x_۲|}{۲} > \varepsilon > ۰$ به تناقض می‌رسیم و وجود تناقض به‌معنای نادرستی فرض (۷) است. قضیه ثابت شد.

۴. دنباله‌های یکنوا. وقتی تعریف دنباله یا تعریف حد آن را آوردیم، هیچ قیدی یا ویژگی خاصی دربارهٔ تابعی که دنباله را معرفی می‌کند، قایل نشدیم، این دنباله را در نظر می‌گیریم:

$$\frac{۱}{۳}, \frac{۲}{۴}, \frac{۳}{۵}, \ldots, \frac{n}{n+۲}, \ldots$$

هر جملهٔ این دنباله، از جملهٔ پیش از خودش بزرگتر است[۱]. درواقع

$$a_{n+۱} = \frac{n+۱}{n+۱+۲} = ۱ - \frac{۲}{n+۳} > ۱ - \frac{۲}{n+۲} = \frac{n}{n+۲} = a_n$$

یعنی $a_{n+۱} > a_n$. اگر دنباله $\{a_n\}$ دارای این ویژگی باشد که برای هر n داشته باشیم:

$$a_n \leq a_{n+۱}$$

۱. می‌دانیم، اگر به صورت و مخرج کسری که از واحد کوچکتر است، یک واحد اضافه کنیم، کسر بزرگتر و به واحد نزدیکتر می‌شود.

آن‌وقت دنباله را **صعودی یکنوا** (یا غیرنزولی) گویند.

اگر دنباله $\{a_n\}$ برای هر n، در نابرابری

$$a_n < a_{n+1}$$

صدق کند، آن‌وقت آن را **اکیداً صعودی یکنوا** گویند.

به‌همین ترتیب، می‌توان دنبالهٔ نزولی یکنوا، و دنبالهٔ اکیداً نزولی را تعریف کرد. برای نمونه دنبالهٔ

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$

یکنوا و اکیداً نزولی است.

دنبالهٔ یکنوا تنها می‌تواند از یک سمت به حد خود نزدیک شود: از سمت راست یا از سمت چپ.

یادآوری می‌کنیم، دنباله‌های متناوبی وجود دارند که دارای حد هستند. به‌عنوان مثال، دنبالهٔ

$$-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, (-1)^n\frac{1}{n}, \ldots$$

به‌سمت صفر همگرا است: صفر حد آن است. ولی این دنباله از دو سمتِ صفر، به آن نزدیک می‌شود.

دنباله‌های یکنوا، ویژگی‌های ساده و جالبی دارند.

قضیه. دنبالهٔ صعودی یکنوای $\{a_n\}$، وقتی کران بالا داشته باشد، دارای حدی معین و محدود است. این حد منطبق است بر کران بالای واقعی مجموعه.

اثبات. مجموعهٔ $\{a_n\}$ را در نظر می‌گیریم. این مجموعه متعلق به $\mathbf{R}$ (مجموعهٔ همهٔ عددهای حقیقی) است و از بالا کران‌دار است، یعنی

$$a_n \leq M, \quad M < +\infty$$

بنابراین، این مجموعه، کران بالای واقعی دارد که آن را a می‌نامیم: a، بالاترین مقدار ممکن برای a_n است. ثابت می‌کنیم، همین a، حد دنبالهٔ $\{a_n\}$ است.

a، کران بالاست، یعنی برای هر n اریم:

$$a_n \leq a \qquad (۸)$$

از طرف دیگر، a کران بالای واقعی است. بنابراین، برای هر $\varepsilon > ۰$، شماره‌ای مثل N وجود دارد، به‌نحوی که

$$a_N > a - \varepsilon$$

دراین‌صورت، باتوجه به این‌که

$$a_{n+۱} \geq a_n$$

برای هر $n \geq N$ داریم:

$$a_n > a - \varepsilon$$

و باتوجه به (۸):

$$a_n < a + \varepsilon$$

بنابراین برای هر $n \geq N$

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

یعنی بنابر تعریف: $\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\, a_n = a$. قضیه ثابت شد.

یادداشت ۱. یادآوری می‌کنیم، اگر دنبالهٔ $\{a_n\}$ صعودی یکنوا باشد، ولی کران بالا نداشته باشد، آن‌وقت

$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\, a_n = +\infty$$

به‌همین‌ترتیب می‌توان دربارهٔ دنباله‌های نزولی یکنوا داوری کرد: *اگر دنبالهٔ عددی* $\{a_n\}$ *نزولی یکنوا و دارای کران پایین باشد، آن‌وقت دنباله دارای حدی معین و محدود است.* همچنین، اگر دنباله یکنوا و نزولی باشد، ولی کران پایین نداشته باشد، آن‌وقت حد آن $-\infty$ است.

یادداشت ۲. اگر جمله‌های دنباله چنان باشند که، باتوجه به حکم‌های بالا، نتوانیم مقدار حد را پیدا کنیم و یا از قبل معین نباشد، باز هم این حکم‌ها درست‌اند و به‌معنای وجود حد هستند. به‌همین مناسبت، در چنین حالتی، این قضیه را **قضیهٔ وجودی حد** می‌نامند.

مثال ۳. *این دنباله را در نظر می‌گیریم:*

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \qquad (8)$$

آیا این دنباله، دارای حد است؟

حل. این دنبالهٔ صعودی یکنواست. در واقع، اگر جملهٔ عمومی دنباله را، بنابر قانون بسط دوجمله‌ای باز کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1 \times 2} \cdot \frac{1}{n^2} +$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \times 2 \times 3} \cdot \frac{1}{n^3} + \dots$$

$$\dots + \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1 \times 2 \times \dots \times k} \cdot \frac{1}{n^k} + \dots$$

$$\dots + \frac{n(n-1)\dots(n-n+1)}{1 \times 2 \times \dots \times n} \cdot \frac{1}{n^n} =$$

$$= 2 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots$$

$$\ldots + \frac{۱}{n!}\left(۱ - \frac{۱}{n}\right)\left(۱ - \frac{۲}{n}\right)\ldots\left(۱ - \frac{n-۱}{n}\right)$$

و چون

$$۱ - \frac{۱}{n+۱} > ۱ - \frac{۱}{n},$$
$$\left(۱ - \frac{۱}{n+۱}\right)\left(۱ - \frac{۲}{n+۱}\right) > \left(۱ - \frac{۱}{n}\right)\left(۱ - \frac{۲}{n}\right)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

که از آن‌جا معلوم می‌شود: $a_{n+۱} > a_n$.

اکنون ثابت می‌کنیم، دنبالهٔ (۸) کران بالا دارد (یعنی همهٔ جمله‌های آن از عددی کوچکتر است). داریم:

$$a_n < ۲ + \frac{۱}{۲!} + \frac{۱}{۳!} + \ldots + \frac{۱}{n!} <$$
$$< ۲ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۸} + \ldots + \frac{۱}{۲^{n-۱}} < ۳$$

و چون جملهٔ اول این دنباله (به‌ازای $n = ۱$) برابر است با ۲، پس

$$۲ < \left(۱ + \frac{۱}{n}\right)^n < ۳, \quad (n = ۱, ۲, \ldots)$$

بنابراین، بنابر قضیه‌ای که ثابت کردیم، این دنباله حدی دارد. حد این دنباله را با نماد e نشان می‌دهند:

$$e = \underset{n\to\infty}{\text{حد}} \left(۱ + \frac{۱}{n}\right)^n$$

عدد e که به **عدد نپر** مشهور است و نپر (ریاضی‌دان ایرلندی) آن را مبنای لگاریتم قرار داد (لگاریتم نپری یا لگاریتم طبیعی)، عددی است گنگ و

غیرجبری که در آنالیز ریاضی کاربرد فراوانی دارد. مقدار e تا چند رقم دهدهی چنین است:

$$e = ۲/۷۱۸\ ۲۸۱\ ۸۲۸\ ۴۵۹\ ۰۴۵\ldots$$

۵. دنباله‌های بی‌نهایت کوچک. دنبالهٔ $\{a_n\}$ را بی‌نهایت کوچک می‌نامیم، وقتی که حد آن، برابر صفر باشد. به‌زبان دیگر، در دنبالهٔ بی‌نهایت کوچک، از جمله‌ای (با شمارهٔ به‌اندازهٔ کافی بزرگ) به بعد، همهٔ جمله‌ها در همسایگی صفر قرار دارند. در واقع، وقتی حد دنبالهٔ $\{a_n\}$ برابر صفر باشد، به‌معنای این است که برای هر $\varepsilon > ۰$، می‌توان شمارهٔ N را طوری پیدا کرد که برای هر $n \geq N$ داشته باشیم:

$$|a_n - ۰| < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < a_n < \varepsilon$$

دنباله‌های بی‌نهایت کوچک را با حرف‌های الفبای یونانی نشان می‌دهند: $\{\alpha_n\}$، $\{\beta_n\}$، $\{\gamma_n\}$، ...

اگر حد دنبالهٔ $\{a_n\}$ برابر a باشد، به‌این معناست که

$$\{a_n - a\} = \{\alpha_n\} \Rightarrow a_n = a + \alpha_n$$

این قضیه‌ها هم درست است: ۱) *از مجموع تعداد محدودی دنبالهٔ بی‌نهایت کوچک، دنباله‌ای بی‌نهایت کوچک به‌دست می‌آید.* ۲) *از حاصل‌ضرب تعداد محدودی دنبالهٔ بی‌نهایت کوچک، دنباله‌ای بی‌نهایت کوچک به‌دست می‌آید.* ۳) *حاصل‌ضرب دنباله‌ای که دارای حدی معین و محدود است در دنبالهٔ بی‌نهایت کوچک، دنباله‌ای بی‌نهایت کوچک است.*

۶. دنباله‌های بی‌نهایت بزرگ و بستگی آن‌ها با دنباله‌های بی‌نهایت کوچک. به‌جز دنباله‌های بی‌نهایت کوچک، دنباله‌های بی‌نهایت بزرگ هم، در آنالیز ریاضی و کاربردهای آن اهمیت زیادی دارد. دنباله‌ای را بی‌نهایت

بزرگ گویند، وقتی که با میل n به‌سمت بی‌نهایت، مقدار قدرمطلق جملهٔ عمومی a_n به‌سمت بی‌نهایت میل کند:

اگر $n \to \infty$، آن‌وقت $|a_n| \to +\infty$

برای نمونه، دنبالهٔ $\{|(-1)^n n^2|\}$، دنباله‌ای بی‌نهایت بزرگ است:

$$\{|(-1)^n n^2|\} = \{n^2\}$$

که حد آن $+\infty$ است. درضمن، از تعریف دنبالهٔ بی‌نهایت بزرگ معلوم می‌شود، اگر دنباله‌ای به‌سمت $-\infty$ هم میل کند، بی‌نهایت بزرگ است.

برای دنبالهٔ بی‌نهایت بزرگ، باید بافرض $E > 0$، بتوان برای هر مقدار دلخواه E، شمارهٔ N را پیدا کرد به‌نحوی که به‌ازای هر $n \geq N$ داشته‌باشیم $|a_n| > E$. بنابراین، به‌عنوان مثال، دنبالهٔ

$$1, 0, 3, 0, 5, 0, \ldots, 2n+1, 0, \ldots$$

گرچه محدود نیست، دنبالهٔ بی‌نهایت بزرگ به‌حساب نمی‌آید.

این قضیه‌ها درست است: ۱) *اگر دنبالهٔ $\{a_n\}$ بی‌نهایت بزرگ باشد، آن‌وقت دنبالهٔ $\{\alpha_n\}$، به‌شرط $\alpha_n = \frac{1}{a_n}$ بی‌نهایت کوچک است.* ۲) *اگر $\{\alpha_n\}$ دنبالهٔ بی‌نهایت کوچک باشد، به‌شرط $\alpha_n \neq 0$ و $a_n = \frac{1}{\alpha_n}$، دنبالهٔ $\{a_n\}$ بی‌نهایت بزرگ است.*

مثال ۴. *ثابت کنید، دنباله $\{q^n\}$، به‌ازای $|q| < 1$ بی‌نهایت کوچک و به‌ازای $|q| > 1$ بی‌نهایت بزرگ است.*

حل. $|q| < 1$ و ε را عدد مثبت دلخواهی می‌گیریم. از این نابرابری آغاز می‌کنیم:

$$|q^n| < \varepsilon \Rightarrow |q|^n < \varepsilon$$

اگر از دو طرف این نابرابری، در مبنای $a > 1$ لگاریتم بگیریم، به‌دست می‌آید:

$$n \log_a |q| < \log_a \varepsilon \Rightarrow n > \frac{\log_a \varepsilon}{\log_a |q|}$$

بنابراین، به‌عنوان $N = N(\varepsilon)$ می‌توان در نظر گرفت:

$$N = \left[\frac{\log_a \varepsilon}{\log_a |q|}\right] + ۱$$

یعنی $\{q^n\}$ به‌ازای $|q| < ۱$، بی‌نهایت کوچک است.

اکنون فرض می‌کنیم $|q| > ۱$. اگر $q = \frac{۱}{p}$ بگیریم، خواهیم داشت $|p| < ۱$ و بنابراین دنباله $\{p^n\}$ بی‌نهایت کوچک است. از این‌جا نتیجه می‌شود که $\{q^n\}$ دنباله‌ای بی‌نهایت بزرگ است. یادآوری می‌کنیم، برای $q > ۱$

$$\underset{x\to\infty}{\text{حد}}\, q^n = +\infty$$

و برای $q < -۱$، دنبالهٔ $\{q^n\}$ حدی ندارد.

۷. برخی ویژگی‌های حد دنباله‌ها. در این‌جا، برخی از ویژگی‌های حد دنباله‌ها را، که برای محاسبه سودمندند، بدون اثبات می‌آوریم

۱) $\{a_n\}$ را دنباله‌ای همگرا می‌گیریم (یعنی دارای حد باشد)، درضمن $\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\, a_n = a$، در این‌صورت، اگر c مقدار ثابتی باشد، دنباله $\{c \cdot a_n\}$ هم همگرا است و داریم:

$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}}(c \cdot a_n) = c \cdot \underset{n\to\infty}{\text{حد}}\, a_n = c \cdot a \qquad (۹)$$

۲) اگر $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$، دنباله‌هایی همگرا باشند و داشته باشیم:

$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\, a_n = a, \quad \underset{n\to\infty}{\text{حد}}\, b_n = b$$

آن‌وقت دنباله‌های $\{a_n \pm b_n\}$ همگرا هستند و داریم:

$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}}(a_n \pm b_n) = \underset{n\to\infty}{\text{حد}}\, a_n \pm \underset{n\to\infty}{\text{حد}}\, b_n = a \pm b \qquad (۱۰)$$

۳) اگر $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دنباله‌هایی همگرا باشند و داشته باشیم:

$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\, a_n = a, \quad \underset{n\to\infty}{\text{حد}}\, b_n = b$$

آن‌وقت، دنباله $\{a_n \cdot b_n\}$ هم همگرا است و داریم:

$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}}(a_n \cdot b_n) = \underset{n\to\infty}{\text{حد}}\, a_n \cdot \underset{n\to\infty}{\text{حد}}\, b_n = a \cdot b \qquad (۱۱)$$

۴) $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دو دنبالهٔ همگرا هستند و

$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\, a_n = a, \quad \underset{n\to\infty}{\text{حد}}\, b_n = b$$

آن‌وقت، اگر $b_n \neq 0$ و $b \neq 0$، دنبالهٔ $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ هم همگرا است و داریم:

$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\, \frac{a_n}{b_n} = \frac{\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\, a_n}{\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\, b_n} = \frac{a}{b} \qquad (۱۲)$$

چهار قضیه‌ای را که در این‌جا آوردیم، به‌ویژه، قانون‌های (۱۰)، (۱۱) و (۱۲)، با این پیش‌فرض است که دنباله‌ها دارای حد هستند و در قانون (۱۲)، به‌جز آن، جمله‌ها و حد دنباله‌ای که در مخرج قرار دارد، مخالف صفر باشند. روشن است، در حالتی که این پیش‌فرض‌ها وجود نداشته باشند، حد (۱۰)، (۱۱) یا (۱۲) بستگی به نوع رفتار هردو دنباله دارد. چند مثال می‌آوریم.

مثال ۵. *فرض کنید، برای دنباله‌های $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ داشته باشیم:*

$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\, x_n = +\infty, \quad \underset{x\to\infty}{\text{حد}}\, y_n = -\infty$$

می‌خواهیم $\lim_{x\to\infty}(x_n + y_n)$ را پیدا کنیم.

حل. به سه نمونهٔ متفاوت توجه کنید.

۱) فرض کنید: $x_n = \sqrt{n^۲ - ۱}$ و $y_n = -n$، در این صورت داریم:

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^۲ - ۱} - n) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{-۱}{\sqrt{n^۲ - ۱} + n} = ۰,$$

۲) اگر $x_n = n^۲$ و $y_n = -n$، آن‌وقت

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty}(n^۲ - n) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} n^۲ \left(۱ - \frac{۱}{n}\right) = +\infty,$$

۳) اگر $x_n = (-۱)^n + n^۲$ و $y_n = -n^۲$، آن‌وقت

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty}[(-۱)^n + n^۲ - n^۲] = \lim_{n\to\infty}(-۱)^n$$

و روشن است که چنین حدی وجود ندارد.

به‌این‌ترتیب، می‌بینیم، وقتی حد هریک از دنباله‌ها معین و محدود نباشد، حد (۱۰) ممکن است برابر صفر یا بی‌نهایت باشد یا حدی نداشته باشد. مجموع حد مجموع دو دنباله، ممکن است برابر مجموع حدهای آن‌ها نباشد. به‌همین مناسبت است که، در این حالت، یعنی وقتی حد دنباله‌ها محدود نباشد، گوییم با حالت ویژه‌ای سروکار داریم که به‌طور معمول آن را مبهم گویند. این حالت مبهم را با نماد $(\infty - \infty)$ نشان می‌دهند.

مثال ۶. برای دنباله‌های $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ می‌دانیم:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{y_n\to\infty} y_n = ۰$$

می‌خواهیم $\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ را بررسی کنیم.

حل. باز هم سه نمونه متفاوت می‌آوریم.

۱) $x_n=\frac{۱}{n}$ و $y_n=\frac{۱}{n^۲}$ می‌گیریم، در این صورت داریم:

$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\left(\frac{x_n}{y_n}\right)=\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\frac{\frac{۱}{n}}{\frac{۱}{n^۲}}=\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\,n=+\infty,$$

۲) $x_n=\frac{۱}{n^۲}$ و $y_n==\frac{۱}{n}$، به‌دست می‌آید:

$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\left(\frac{x_n}{y_n}\right)=\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\frac{۱}{n}=۰,$$

۳) $x_n=\frac{(-۱)^n}{n^۲}$ و $y_n=\frac{۱}{n^۲}$، آن‌وقت

$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\left(\frac{x_n}{y_n}\right)=\underset{n\to\infty}{\text{حد}}(-۱)^n$$

یعنی حدی برای آن وجود ندارد.

در این سه حالت، با حد مبهم $\frac{۰}{۰}$ سروکار داریم.

مثال ۷. فرض کنید، برای دنباله‌های $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ داشته باشیم:

$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\,x_n=\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\,y_n=+\infty$$

می‌خواهیم حد دنبالهٔ $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ را بررسی کنیم.

بررسی این حالت را حالت مبهم $\frac{\infty}{\infty}$ می‌نامند و بررسی آن را به‌عهدهٔ خواننده می‌گذاریم. x_n و y_n را دو چندجمله‌ای در نظر بگیرید. اگر درجهٔ x_n بزرگتر از درجهٔ y_n باشد، حد مطلوب برابر $+\infty$، اگر درجه y_n، بیشتر باشد، حد مطلوب برابر صفر می‌شود و اگر x_n و y_n هم‌درجه باشند، دنبالهٔ $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ به‌سمت عددی که برابر نسبت ضریب بزرگترین درجهٔ صورت بر ضریب بزرگترین درجه مخرج است، میل می‌کند.

مثال ۸. برای دو دنبالهٔ $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ فرض می‌کنیم:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \text{۰} \quad \text{و} \quad \lim_{x\to\infty} y_n = +\infty$$

دراین‌صورت حد دنبالهٔ $(x_n \cdot y_n)$ به‌حالت مبهم $\text{۰} \times \infty$ منجر می‌شود. به دو نمونه توجه کنید:

۱) $x_n = \frac{\text{۱}}{n}$ و $y_n = n^{\text{۲}}$ بگیرید، دراین‌صورت

$$\lim_{n\to\infty}(y_n \cdot y_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\text{۱}}{n}\cdot n^{\text{۲}}\right) = \lim_{n\to\infty} n = +\infty$$

۲) $x_n = \frac{(-\text{۱})^n}{n}$ و $y_n = n$ فرض کنید، در این صورت دنبالهٔ $\{x_n \cdot y_n\}$ حدی پیدا نمی‌کند.

نتیجه بگیریم: با در دست داشتن حد دو دنباله، همیشه نمی‌توان حد مجموع، حاصل‌ضرب و خارج‌قسمت آن‌ها را، بدون آگاهی از ساختمان خود دنباله‌ها دانست. به‌ویژه در حالت‌هایی که منجر به صورت‌های مبهم می‌شود، تنها پس از آگاهی دقیق از ساختمان دنباله‌ها، می‌توان دربارهٔ این‌گونه حدها داوری کنیم.

درپایان، ویژگی دیگری از دنباله‌ها را بدون اثبات می‌آوریم. این ویژگی هم برای اثبات وجود حد و هم برای پیدا کردن مقدار حد سودمند است:

دنباله‌های $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ را در نظر بگیرید و فرض کنید:

$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\, a_n = \underset{n\to\infty}{\text{حد}}\, b_n = c$$

درضمن فرض کنید: $a_n \leq c_n \leq b_n$. در این صورت برای دنبالهٔ $\{c_n\}$ داریم:

$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\, c_n = c$$

* ۳§. حد تابع

۱. مفهوم حد تابع. اکنون تابع با ضابطهٔ $y = f(x)$ را در نظر می‌گیریم، که برای مقدارهای نزدیک به $x = a$ معین، ولی به‌احتمالی برای $x = a$ نامعین است. می‌گوییم، A حد تابع $f(x)$ در نقطهٔ a (یا وقتی $x \to a$) است که برای هر مقدار به‌دلخواه کوچک $\varepsilon > 0$، عدد $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ وجود داشته باشد، به‌نحوی‌که نابرابری

$$|f(x) - A| < \delta$$

برای هر مقدار $x \neq a$ که در نابرابری

$$|x - a| < \delta$$

صدق می‌کند، برقرار باشد.

این حقیقت را که، وقتی $x \to a$، تابع $f(x)$ به‌سمت A میل می‌کند، به‌این‌صورت نشان می‌دهند:

$$\underset{x\to a}{\text{حد}}\, f(x) = A$$

مثال ۹. $f(x) = x^{2}$ مطلوب است: $\underset{x\to 1}{\text{حد}}\, f(x)$.

حل. با مراجعه به جدول مقدارهای تابع (به‌ازای مقدارهای مختلف x)، می‌توان فرض کرد که، این حد، برابر است با ۱. برای اثبات درستی این فرض، باید ثابت کنیم که، به‌ازای هر $\varepsilon > ۰$، می‌توان از روی آن، عدد $\delta > ۰$ را طوری پیدا کرد که نابرابری

$$|x^۲ - ۱| < \varepsilon \qquad (۱)$$

برای هر $x \neq ۱$ که در نابرابری

$$|x - ۱| < \delta \qquad (۲)$$

صدق می‌کند، برقرار است. نابرابری (۱) را به‌این‌صورت می‌نویسیم:

$$|x - ۱| < \frac{\varepsilon}{|x + ۱|} \qquad (۳)$$

تنها مقدارهایی از x را در نظر می‌گیریم که برای آن‌ها، نابرابری $|x - ۱| < ۱$ برقرار باشد، دراین‌صورت

$$|x + ۱| = |(x - ۱) + ۲| \leq |x - ۱| + ۲ < ۳$$

از آن‌جا

$$\frac{\varepsilon}{|x + ۱|} > \frac{\varepsilon}{۳}$$

$\delta > ۰$ را طوری انتخاب می‌کنیم که داشته باشیم:

$$\delta < \min\left\{۱, \frac{\varepsilon}{۳}\right\}$$

(یعنی δ را از دو عدد ۱ و $\frac{\varepsilon}{۳}$ کوچکتر می‌گیریم). دراین‌صورت

$$|x - ۱| < \frac{\varepsilon}{۳} < \frac{\varepsilon}{|x + ۱|}$$

به‌این‌ترتیب، نابرابری (۳) برقرار شد، یعنی، برای هر $\varepsilon > ۰$، عدد $\delta > ۰$ وجود دارد، به‌نحوی که برای هر x، که در نابرابری (۲) صدق کند، نابرابری (۱) هم برقرار باشد. و این، به‌معنای آن است که در واقع

$$\underset{x\to ۱}{\text{حد}}\, x^{۲} = ۱$$

توجه کنید: در این‌جا هم مثل قبل، در آغاز باید ε در نظر گرفته شود (ε تقریبی است که تابع را به A نزدیک می‌کند)؛ سپس، مقدار δ (یعنی تقریب نزدیکی متغیر به a) پیدا شود.

این حقیقت که در تعریف حد تابع، لزومی ندارد، δ که همسایگی نقطهٔ a را دربر می‌گیرد، شامل خود a هم باشد، به‌این معناست که ما، ضمن بررسی حد تابع، به رفتار تابع در نزدیکی نقطهٔ a توجه داریم، چراکه ممکن است در خود نقطهٔ a، تابع معین نباشد.

آن‌چه به‌عنوان تعریف حد تابع گفتیم، بیان دقیق این گزاره است: «تابع $f(x)$ دارای حد A است، وقتی متغیر x به‌سمت a میل می‌کند». می‌کوشیم، این گزاره را، روشن‌تر تنظیم کنیم. دنبالهٔ $\{x_n\}$ را که برای هر n، جمله‌های دنباله متعلق به دامنهٔ تابع $f(x)$ باشد و درضمن

$$\underset{nx\to\infty}{\text{حد}}\, x_n = a$$

در نظر می‌گیریم: آن‌وقت، اگر دنبالهٔ $\{y_n\}$ که با برابری

$$y_n = f(x_n)$$

تعریف شده‌است، چنان باشد که داشته باشیم:

$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\, y_n = A \qquad (۴)$$

آن‌وقت می‌توان گفت: «دنباله‌ای که از مقدارهای تابع تشکیل شده‌است، حدی برابر A دارد».

اگر گزارهٔ (۴)، برای دنبالهٔ انتخابی دلخواه $\{x_n\}$ درست باشد، آن‌وقت کم و بیش (و با درک شهودی) روشن است که، عدد A، حد تابع $f(x)$ است.

بنابراین، حد تابع را، به‌صورتی دیگر، که اندکی با تعریف پیشین تفاوت دارد، می‌توان تنظیم کرد:

عدد A را حد تابع $f(x)$، وقتی x به‌سمت a میل می‌کند، گوییم؛ وقتی که برای هر دنبالهٔ مقدارهای متغیر $\{x_n\}$، که برای آن‌ها $\underset{x\to\infty}{\text{حد}}\, x_n = a$، دنبالهٔ مقدارهای متناظر تابع، یعنی $\{f(x_n)\}$، دارای حدی برابر A باشد.

طبیعی است، برای اثبات درستی تعریف اخیر، لازم است هم‌ارز بودن آن با تعریف پیشین ثابت شود، یعنی هم‌ارزی تعریف حد با زبان «ε و δ» و تعریف حد با زبان دنباله‌ها. قضیهٔ مربوط به هم‌ارزی این دو تعریف را تنظیم و با دقت ثابت می‌کنیم.

قضیه. برای این‌که داشته باشیم:

$$\underset{x\to a}{\text{حد}}\, f(x) = A \qquad (۵)$$

لازم و کافی است که برای هر دنبالهٔ $\{x_n\}$ از مقدارهای متغیر واقع در دامنهٔ تابع $f(x)$، که به‌سمت a هم‌گراست،

$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\, x_n = a \qquad (۶)$$

دنبالهٔ متناظر مقدارهای تابع، به‌سمت A هم‌گرا باشد:

$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\, f(x_n) = A \qquad (۷)$$

اثبات. شرط لازم است. ثابت می‌کنیم، اگر شرط (۵) برقرار باشد، آن‌وقت برای هر دنبالهٔ $\{x_n\}$ که با (۶) سازگار است، شرط (۷) هم برقرار است.

از (۵) نتیجه می‌شود، به‌ازای هر $\varepsilon > 0$، می‌توان $\delta > 0$ را (که تابعی از ε است) طوری پیدا کرد که برای هر $x(x \neq a)$، که در نابرابری $|x - a| < \delta$ صدق می‌کند، نابرابری

$$|f(x) - A| < \varepsilon \tag{۸}$$

برقرار باشد. در این صورت برای هر دنبالهٔ $\{x_n\}$ که با (۶) سازگار باشد، می‌توان عددی مثل $N = N(\varepsilon)$ پیدا کرد، به‌نحوی که به‌ازای هر $n \geq N$ داشته باشیم: $|x - a| < \delta$. بنابراین، برای هر $n \geq N$ خواهیم داشت:

$$|f(x) - A| \leq \varepsilon \tag{۹}$$

شرط کافی است. باید ثابت کنیم، اگر شرط‌های (۶) و (۷) برقرار باشند، آن‌وقت شرط (۵) هم برقرار است. این بخش قضیه را با برهان خُلف ثابت می‌کنیم.

فرض کنید، برای هر دنبالهٔ $\{x_n\}$ که با شرط‌های (۶) و (۷) سازگار است، تابع $f(x)$، وقتی $x \to a$ $(x \neq a)$، به‌سمت A میل نکند. یعنی، بتوان $\varepsilon_0 > 0$ را طوری پیدا کرد که برای هر $\delta > 0$، عدد $x_0 = x_0(\delta)$ با شرط $|x_0 - a| \leq \delta$ پیدا شود که برای آن داشته باشیم: $|f(x_0) - A| \geq \varepsilon_0$. در این صورت، دنبالهٔ $\{\delta_n\}$ را با ویژگی

$$\delta_n > 0 \text{ و } \lim_{n\to\infty} \delta_n = 0 \tag{۱۰}$$

انتخاب می‌کنیم. با این دنباله می‌توانیم $x_n = x_n(\delta n)$ $(x_n \neq 0)$ را طوری بسازیم که

$$|x_n - a| \leq \delta_n \text{ و } |f(x_n) - A| \geq \varepsilon_0 \tag{۱۱}$$

بنابر فرض

$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\, x_n = a \qquad (۱۲)$$

درضمن $\{f(x_n)\}$ به‌سمت A میل نمی‌کند و، به‌این ترتیب، به نتیجه‌ای که (۷) را نقض می‌کند، می‌رسیم. قضیه ثابت شد.

به‌خودی خود روشن است که، به‌یاری این قضیه، می‌توان ویژگی‌های حد دنباله‌ها را، برای حد تابع‌ها هم درست دانست. می‌توانیم بعضی شرط‌ها را، وقتی x به‌سمت a میل می‌کند، اضافه کنیم. حالت $x - a > 0$ یا $x - a < 0$، به‌معنای حد تابع است وقتی که متغیر از یک سمت a به آن نزدیک می‌شود. در حالت $x - a > 0$، حد راست تابع و در حالت $x - a < 0$، حد چپ تابع در نقطهٔ $x = a$ به‌دست می‌آید و به‌صورت $\underset{x\to a^+}{\text{حد}} f(x)$ و $\underset{x\to a^-}{\text{حد}} f(x)$ نشان داده می‌شود. گاهی هم، حد راست و حد چپ $f(x)$ را در نقطهٔ $x = a$، به‌صورت $f(a+0)$ و $f(a-0)$ معرفی می‌کنند.

روشن است، وقتی x به‌سمت a میل می‌کند، به‌شرطی تابع $f(x)$ دارای حد است که حد راست و حد چپ داشته باشد و، درضمن، این دو حد با هم برابر باشند.

$$\underset{x\to a^+}{\text{حد}} f(x) = \underset{x\to a^-}{\text{حد}} f(x)$$

درستی این قضیه هم برای حد تابع‌ها به‌سادگی ثابت می‌شود:

قضیه. اگر برای $x \in (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$، تابع‌های $f_1(x)$، $f_2(x)$ و $f_3(x)$ معین باشند و داشته باشیم:

$$f_1(x) \leq f_2(x) \leq f_3(x)$$

درضمن بدانیم

$$\underset{x\to a}{\text{حد}} f_1(x) = \underset{x\to a}{\text{حد}} f_3(x) = A$$

آن‌وقت، تابع $f_۲(x)$ هم، به‌ازای $x \to a$، دارای حد است و داریم:

$$\underset{x\to a}{\text{حد}}\, f_۲(x) = A$$

در پایان این بخش، مثالی برای پیدا کردن حد یک تابع مشهور می‌آوریم و آن را به زبان دنباله‌ها بررسی می‌کنیم.

مثال ۱۰. $f(x) = (۱ + x)^{\frac{۱}{x}}$ $(x \in \mathbf{R})$. مطلوب است محاسبهٔ

$$\underset{x\to ۰}{\text{حد}}\, (۱ + x)^{\frac{۱}{x}} \qquad (۱۳)$$

حل. اگر به‌طور مستقیم در تابع $f(x)$، مقدار x را برابر صفر قرار دهیم، به‌حالت مبهمی برخورد می‌کنیم که، به‌صورت نمادین، آن را با ۱^{∞} نشان می‌دهند. باید ابهام را از این صورت مبهم برطرف کنیم. برای این منظور، از اصطلاح‌های دنباله‌ها استفاده می‌کنیم. دنبالهٔ بی‌نهایت کوچک $\{x_n\}$ را در نظر می‌گیریم؛ باید ثابت کنیم دنبالهٔ

$$\left\{(۱ + x_n)^{\frac{۱}{x_n}}\right\} \qquad (۱۴)$$

دارای حد است. اگر به‌جای $\{x_n\}$، دنبالهٔ $\left\{\frac{۱}{n}\right\}$ را انتخاب کنیم، از قبل می‌دانیم که

$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}} \left(۱ + \frac{۱}{n}\right)^n = e \qquad (۱۵)$$

این برابری ما را امیدوار می‌کند که، به‌احتمالی، حد (۱۳) هم برابر e باشد.

دنبالهٔ بی‌نهایت کوچک $\{x_n\}$ را با شرط‌های

$$۰ < x_{n+۱} < x_n \quad \text{و} \quad \underset{n\to\infty}{\text{حد}}\, x_n = ۰$$

انتخاب می‌کنیم. در این صورت، همیشه دنبالهٔ یکنوا و اکیداً صعودیِ $\{k_n\}$ از عددهای طبیعی پیدا می‌شود، به‌نحوی که داشته‌باشیم

$$k_n \le \frac{۱}{x_n} < k_n + ۱$$

یا $\frac{۱}{k_n+۱} < x_n \leq \frac{۱}{k_n}$. در این صورت

$$\left(۱+\frac{۱}{k_n+۱}\right)^{k_n} < (۱+x_n)^{\frac{۱}{x_n}} < \left(۱+\frac{۱}{k_n}\right)^{k_n+۱}$$

و یا

$$\left(۱+\frac{۱}{k_n+۱}\right)^{k_n+۱}\left(۱+\frac{۱}{k_n+۱}\right)^{-۱} < (۱+x_n)^{\frac{۱}{x_n}} <$$
$$< \left(۱+\frac{۱}{k_n}\right)^{k_n}\left(۱+\frac{۱}{k_n}\right)$$

بنابراین، باتوجه به (۱۴) و قضیهٔ پایانی (پیش از مثال ۹) داریم:

$$\text{حد}(۱+x_n)^{\frac{۱}{x_n}} = e \qquad (۱۶)$$

اکنون دنبالهٔ بی‌نهایت کوچک $\{x_n\}$ را با شرط‌های

$$x_n < ۰ \text{ و } \underset{n\to\infty}{\text{حد}}\, x_n = ۰$$

در نظر می‌گیریم و دنبالهٔ جدید $\{y_n\}$ را با شرط $y_n = -x_n$ انتخاب می‌کنیم. به‌دست می‌آید:

$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}}(۱+x_n)^{\frac{۱}{x_n}} = \underset{n\to\infty}{\text{حد}}(۱-y_n)^{-\frac{۱}{y_n}} = \underset{n\to\infty}{\text{حد}}\left(\frac{۱}{۱-y_n}\right)^{\frac{۱}{y_n}} =$$
$$= \underset{n\to\infty}{\text{حد}}\left(۱+\frac{y_n}{۱-y_n}\right)^{\frac{۱-y_n}{y_n}}\left(۱+\frac{y_n}{۱-y_n}\right) = e\times ۱ = e$$

به‌این ترتیب، نتیجه می‌گیریم که حد دنبالهٔ (۱۴)، به هر ترتیبی که دنبالهٔ $\{x_n\}$ را انتخاب کنیم، برابر است با e و بنابراین، با استفاده از حد تابع به زبان دنباله‌ها نتیجه می‌گیریم:

$$\underset{x\to ۰}{\text{حد}}(۱+x)^{\frac{۱}{x}} = e \qquad (۱۷)$$

اگر در (۱۷) فرض کنیم $y = \frac{۱}{x}$، به‌دست می‌آید:

$$\underset{y\to\pm\infty}{\text{حد}} \left(۱ + \frac{۱}{y}\right)^{y} = e$$

به‌همین ترتیب داریم:

$$\underset{x\to\pm\infty}{\text{حد}} \left(۱ + \frac{m}{x}\right)^{x} = e^{m}$$

* ۴§. پیوستگی تابع‌ها

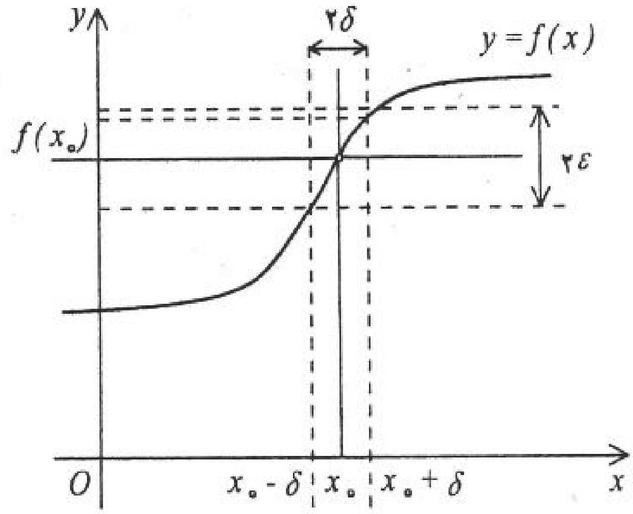
۱. تعریف پیوستگی تابع در نقطه؛ نمو متغیر و نمو تابع؛ گونه‌های ناپیوستگی. تابع $f(x)$ را که در مجموعهٔ X معین است، در نظر می‌گیریم. تابع $f(x)$ را در نقطهٔ $x_{\circ} \in X$ پیوسته گویند، وقتی‌که حد تابع زمانی‌که x به‌سمت $x_{\circ}$ میل می‌کند، وجود داشته باشد و با $f(x_{\circ})$ برابر باشد:

$$\underset{x\to x_{\circ}}{\text{حد}} f(x) = f(x_{\circ}) = f(\underset{x\to x_{\circ}}{\text{حد}} x)$$

یعنی، برای هر $\varepsilon > \circ$، $\delta = \delta(\varepsilon)$ وجود داشته‌باشد، به‌نحوی‌که برای هر x که در نابرابری $|x - x_{\circ}| \leq \delta$ صدق می‌کند، نابرابری $|f(x) - f(x_{\circ})| < \varepsilon$ برقرار باشد.

اگر بخواهیم تعریف حد تابع را به زبان دنباله‌ها بیان کنیم، می‌توانیم بگوییم: تابع $f(x)$ را در نقطهٔ $x_{\circ}$ تنها وقتی پیوسته گوییم که، برای هر دنبالهٔ $\{x_n\}$، که به‌سمت $x_{\circ}$ همگرا باشد، داشته‌باشیم:

$$\underset{x\to\infty}{\text{حد}} f(x_n) = f(x_{\circ})$$



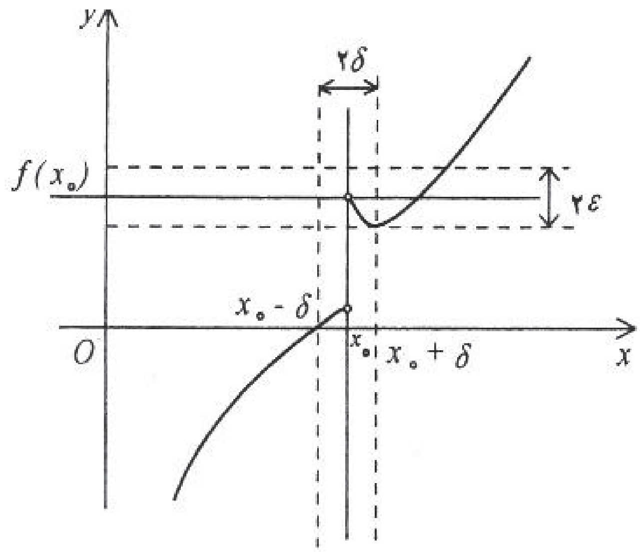
شکل ۶

برای این‌که تعریف پیوستگی را، از دیدگاه هندسی روشن کنیم، از نمودار تابع $y = f(x)$ یاری می‌گیریم. برای این منظور $\varepsilon > ۰$ دلخواه را همراه با نواری به‌عرض ۲ε در طول خط راست $y = f(x_۰)$ در نظر می‌گیریم (شکل ۶).

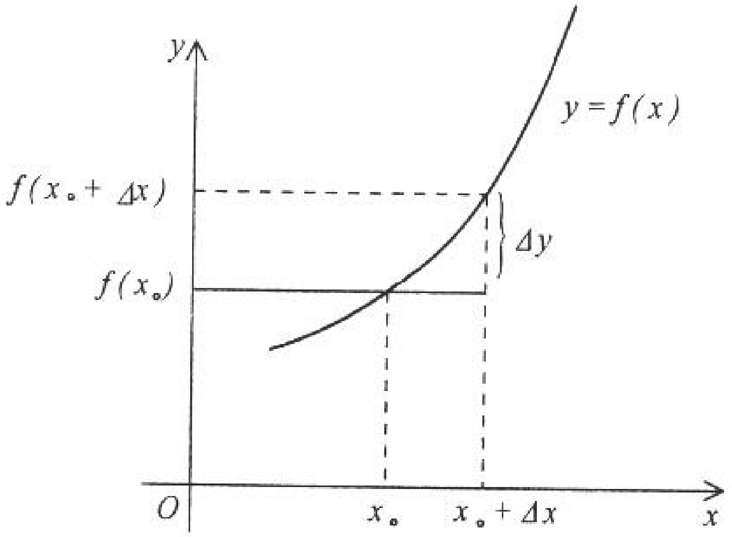
اگر تابع پیوسته باشد، باید بتوان $\delta > ۰$ را طوری پیدا کرد که تمامی آن بخش از نمودار که در درون نوار قائم به عرض ۲δ در طول خط راست $x = x_۰$ قرار دارد، شامل نوار افقی به عرض ۲ε هم باشد (شکل ۶ را ببینید).

اگر تابع در نقطهٔ $x_۰$ ناپیوسته باشد، هرقدر که نوار قائم دو طرف خط راست $x = x_۰$ را باریک بگیریم، همیشه شامل بخشی از نمودار است که در بیرون نوار افقی به پهنای ۲ε در طول خط راست $y = f(x_۰)$ قرار دارد (شکل ۷).

اکنون **نمو تابع** و **نمو متغیر مستقل** را در نقطه‌ای مثل $x_۰$ در نظر می‌گیریم. $\Delta x = x - x_۰$ را نمو متغیر و $\Delta y = f(x_۰ + \Delta x) - f(x_۰)$ را نمو تابع می‌گیریم (شکل ۸). دراین‌صورت این قضیه درست است (که در این‌جا، از اثبات آن می‌گذریم):



شکل ۷



شکل ۸

قضیه. اگر تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x_\circ$ پیوسته باشد، آن‌گاه

$$\underset{\Delta x\to\circ}{\text{حد}}\ \Delta y = \circ$$

تعریف. تابع $f(x)$ را در مجموعهٔ X پیوسته گویند، وقتی که در هر نقطهٔ X پیوسته باشد.

فرض کنید، تابع $f(x)$ در بازهٔ بستهٔ $[x_۱, x_۲]$ معین باشد. دراین‌صورت $f(x)$ را در سمت راست نقطهٔ $x_۱$ یا در سمت چپ نقطهٔ $x_۲$ پیوسته گویند،

وقتی که به‌ترتیب داشته باشیم:

$$\underset{x\to x_1^+}{\text{حد}} f(x) = f(x_1) \quad \text{یا} \quad \underset{x\to x_2^-}{\text{حد}} f(x) = f(x_2)$$

تابع $f(x)$ را در بازهٔ بسته $[x_1, x_2]$ وقتی پیوسته گویند که در تمام نقطه‌های درونی این بازه، در نقطهٔ x_1 از سمت راست و در نقطهٔ x_2 از سمت چپ پیوسته باشد.

می‌توان ثابت کرد که، همهٔ تابع‌های مقدماتی، به‌ازای همهٔ مقدارهایی از x (که برای آن‌ها، تابع وجود دارد) پیوسته‌اند. هر ترکیب حسابی تابع‌های پیوسته، در هر نقطه‌ای که در آن‌جا این ترکیب معنا داشته باشد، تابعی پیوسته است. مثلاً اگر تابع‌های $f(x)$ و $g(x)$ در نقطهٔ x_0 پیوسته باشند و درضمن $g(x) \neq 0$، آن‌وقت تابع $h(x)$ با تعریف

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

در نقطهٔ x_0 پیوسته است. در واقع

$$\underset{x\to 0}{\text{حد}} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\underset{x\to x_0}{\text{حد}} f(x)}{\underset{x\to x_0}{\text{حد}} g(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)} = h(x_0)$$

تابع $f(x)$ را که در همسایگی نقطهٔ x_0 معین است، به‌ازای $x = x_0$ ناپیوسته گویند، اگر یکی از خواست‌های زیر برآورده نشود:

۱) وجود $\underset{x\to x_0^-}{\text{حد}} f(x)$ و وجود $\underset{x\to x_0^+}{\text{حد}} f(x)$ و محدود بودن این دو حد؛

۲) $\underset{x\to x_0^+}{\text{حد}} f(x) = \underset{x\to x_0^-}{\text{حد}} f(x)$؛

۳) $\underset{x\to x_0^+}{\text{حد}} f(x) = f(x_0) = \underset{x\to x_0^-}{\text{حد}} f(x)$

این قضیه هم، دربارهٔ تابع‌های مرکب درست است:

قضیه. اگر $f(x)$ در نقطهٔ x_0 و $g(x)$ در نقطهٔ $y_0 = f(x_0)$ پیوسته باشند، آن‌وقت تابع $g(f(x))$ در نقطهٔ x_0 پیوسته است.

۲. برخی ویژگی‌های تابع‌های پیوسته. برخی ویژگی‌های تابع‌هایی را که در یک بازهٔ بسته پیوسته‌اند، بدون اثبات می‌آوریم.

قضیه. (قضیهٔ وایرشتراس). اگر تابع $y = f(x)$ در بازهٔ بستهٔ $[a, b]$ معین و پیوسته باشد، آن‌وقت در بازهٔ $[a, b]$، دست‌کم یک نقطهٔ $x = x_1$ وجود دارد، به‌نحوی که مقدار تابع در این نقطه، برای هر $x \in [a, b]$ در نابرابری

$$f(x_1) \geq f(x)$$

صدق می‌کند. همچنین در بازهٔ $[a, b]$، دست‌کم یک نقطه مثل x_2 وجود دارد که برای آن $f(x_2)$، به‌ازای هر مقدار $x \in [a, b]$ در نابرابری

$$f(x_2) \leq f(x)$$

صدق می‌کند. مقدار $M = f(x_1)$ را **بیشترین مقدار** تابع $y = f(x)$ در بازهٔ بستهٔ $[a, b]$ و مقدار $m = f(x_2)$ را **کمترین مقدار** تابع $y = f(x)$ در بازهٔ بستهٔ $[a, b]$ گویند.

قضیه. $y = f(x)$ را در بازهٔ بستهٔ $[a, b]$ معین و پیوسته می‌گیریم و فرض می‌کنیم برای x_1 و x_2 از بازهٔ $[a, b]$ داشته باشیم: $f(x_1) = A$ و $f(x_2) = B$. در این صورت، اگر عدد دلخواه C را بین A و B انتخاب کنیم، دست‌کم یک نقطهٔ $c \in [a, b]$ پیدا می‌شود که برای آن داریم: $f(c) = C$.

نتیجه ۱. اگر $y = f(x)$ در بازهٔ بستهٔ $[a, b]$ معین و پیوسته باشد، آن‌وقت در همین بازهٔ $[a, b]$، هر مقداری را که بین بیشترین و کمترین مقدار تابع باشد، دست‌کم یک بار می‌پذیرد.

نتیجهٔ ۲. اگر تابع $y = f(x)$ در بازهٔ بستهٔ $[a, b]$ معین و پیوسته باشد و اگر در این بازه، دو مقدار با علامت‌های مختلف را بپذیرد، یعنی داشته باشیم: $f(a) \cdot f(b) < ۰$، آن‌وقت در درون بازهٔ $[a, b]$، دست‌کم یک نقطهٔ مثل $x = c$ وجود دارد، که به‌ازای آن، تابع به‌سمت صفر میل می‌کند:

$$f(c) = ۰$$

نقطهٔ $x = c$ را، نقطهٔ صفر (یا ریشهٔ) تابع $y = f(x)$ گویند.

§۵. حد یک تابع و پیوستگی تابع در یک نقطه با درک شهودی

برای درک مفهوم حد یک تابع، وقتی که ضابطهٔ آن داده شده باشد، به این مثال‌ها توجه کنید.

مثال ۱. تابع با ضابطهٔ $y = \frac{|x|}{x}$ در نقطهٔ $x = ۰$ چه رفتاری دارد؟

حل. می‌دانیم تقسیم بر صفر معنی ندارد. بنابراین در تابع با ضابطهٔ $y = \frac{|x|}{x}$ باید شرط کرد $x \neq ۰$.

x نمی‌تواند برابر صفر باشد. این درست! ولی وقتی x به صفر نزدیک می‌شود، مقدار تابع به چه عددی نزدیک می‌شود؟

می‌دانیم، برای $x > ۰$ داریم $|x| = x$ و برای $x < ۰$ داریم $|x| = -x$. بنابراین، ناچاریم دو حالت مختلف در نظر بگیریم.

۱) $x > ۰$ هر عددی باشد (کوچک یا بزرگ)، به‌دست می‌آید:

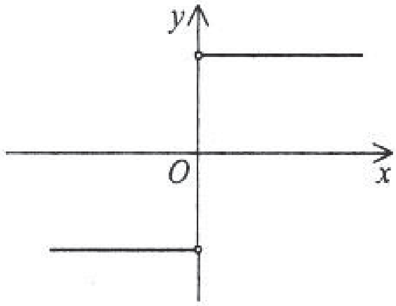
$$y = \frac{|x|}{x} = \frac{x}{x} = ۱$$

۲) $x < ۰$ هر عددی باشد، داریم:

$$y = \frac{|x|}{x} = \frac{-x}{x} = -۱$$

تابع $y = \frac{|x|}{x}$ برای هر مقدار مثبت x برابر ۱ و برای هر مقدار منفی x برابر ۱− است. یعنی اگر x مقدار مثبتی باشد و به صفر نزدیک شود، در هر حال برای y، مقدار ۱ به‌دست می‌آید و اگر x مقداری منفی باشد و به صفر نزدیک شود، مقدار y برابر ۱− می‌شود. در ریاضیات معمول شده است بگویند: اگر x از سمت راست ۰ به آن نزدیک شود $y = ۱$ و اگر از سمت چپ ۰ به آن نزدیک شود برابر ۱− است. به‌زبان دقیق‌تر: حد راست $y = \frac{|x|}{x}$ در نقطهٔ $x = ۰$ برابر ۱ و حد چپ آن در این نقطه برابر ۱− است. این مطلب را این‌طور می‌نویسند:

$$\lim_{x \to ۰^+} y = ۱ \quad \text{و} \quad \lim_{x \to ۰^-} y = -۱$$



شکل ۹

نمودار تابع در شکل ۹ داده شده‌است. تابع در نقطهٔ $x = ۰$ معنا ندارد [به‌همین مناسبت روی نمودار نقطه‌های $(۰, ۱)$ و $(۰, -۱)$ با دایره‌ای توخالی نشان داده شده‌است، یعنی این نقطه‌ها جزو نمودار نیستند]. درضمن، در نمودار، در نقطهٔ $x = ۰$، یک جدایی پدید آمده است. اگر روی نیم‌خط پایین (برای $x < ۰$) از چپ به راست حرکت کنیم، هرقدر به $x = ۰$ نزدیک شویم، تازمانی که $x \neq ۰$ است، مقدار $y = -۱$ به‌دست می‌آید. ولی به‌محض این‌که به $x = ۰$ برسیم، از نمودار جدا می‌شویم و برای ادامهٔ

حرکت،باید روی نیم‌خط بالا حرکت کنیم. گویند تابع $y = \frac{|x|}{x}$ در نقطهٔ $x = ۰$ ناپیوسته (یا گسسته) است. نمودار تابع در تمام نقطه‌ها به هم پیوند دارد، به‌جز در نقطهٔ $x = ۰$. در این نقطه تابع پیوسته نیست.

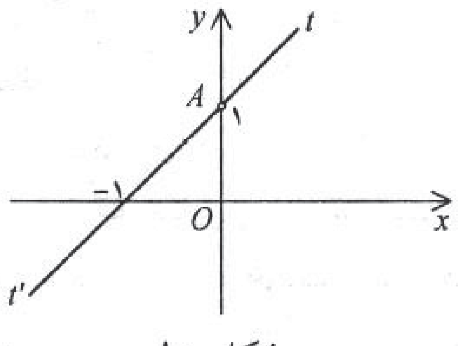
مثال ۲. تابع با ضابطهٔ $y = \frac{x^۲ + x}{x}$، در نقطهٔ $x = ۰$ چه وضعی دارد؟

حل. $x \neq ۰$، زیرا مخرج نمی‌تواند برابر صفر باشد. ولی با شرط $x \neq ۰$، می‌توان کسر را ساده کرد (وقتی x برابر صفر باشد، نمی‌توان کسر را ساده کرد، زیرا صورت و مخرج یک کسر را نمی‌توان بر صفر بخش کرد):

$$y = \frac{x^۲ + x}{x} = \frac{x(x + ۱)}{x} = x + ۱, \quad (x \neq ۰)$$

نمودار تابع با ضابطهٔ $y = x + ۱$، یک خط راست است. ولی $y = \frac{x^۲ + x}{x}$ در نقطهٔ $x = ۰$ معنی ندارد. بنابراین نمودار آن عبارت است از خط راست $y = x + ۱$ به‌جز نقطهٔ $(۰ , ۱)$ (شکل ۱۰). روی شکل دیده می‌شود، وقتی روی نیم‌خط راست At'، به نقطهٔ A نزدیک شویم (یعنی x را از سمت مقدارهای منفی به صفر نزدیک کنیم)، مقدار y به عدد ۱ نزدیک می‌شود، یعنی

$$\underset{x \to ۰^-}{\text{حد}}\ y = ۱$$



شکل ۱۰

و اگر روی نیم‌خط راست At به نقطهٔ A نزدیک شویم، باز هم مقدار y به ۱ نزدیک می‌شود:

$$\lim_{x\to ۰^+} y = ۱$$

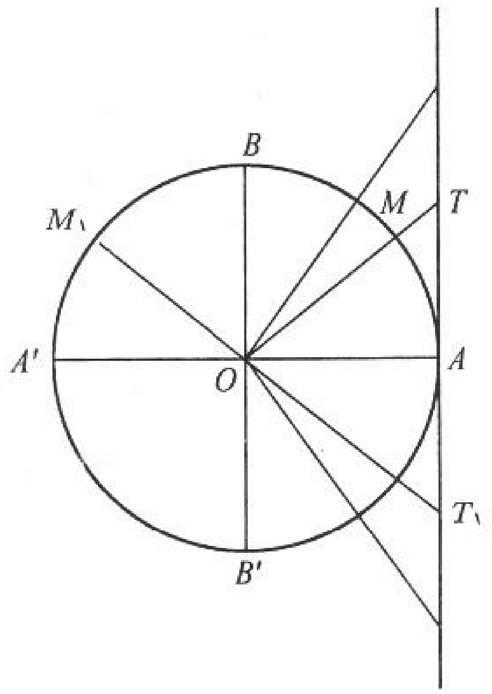
ولی مقدار y در خود نقطهٔ $x = ۰$ معنی ندارد. پس

حد چپ و حد راست y در نقطهٔ $x = ۰$ برابر واحد است، ولی در خود نقطهٔ $x = ۰$ معنی ندارد.

مثال ۳. تابع با ضابطهٔ $y = \tan x$ در نقطهٔ $x = \frac{\pi}{۲}$ چه وضعی دارد؟

حل. به شکل ۱۱ توجه کنید. اگر کمان AM را (در ربع اول دایرهٔ مثلثاتی) x فرض کنیم، هرچه نقطهٔ M، انتهای کمان AM، به نقطهٔ B $\left(x = \frac{\pi}{۲}\right)$ نزدیک شود، مقدار AT $(\tan x)$ بزرگتر می‌شود (شکل ۱۱):

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}^-} \tan x = +\infty$$



شکل ۱۱

همچنین اگر $\widehat{AM_۱} = x$، آن‌وقت با نزدیک شدن $M_۱$ به نقطهٔ B، مقدار $\tan x$ به‌سمت بی‌نهایت منفی می‌رود:

$$\text{حد}_{x \to \frac{\pi}{۲}^+} \tan x = -\infty$$

و در خود نقطه B، یعنی برای $x = \frac{\pi}{۲}$، مقدار $\tan x$ معنی ندارد.

در نقطهٔ $x = \frac{\pi}{۲}$، حد چپ و حد راست تابع $\tan x$ متفاوت است و در خود نقطهٔ $\frac{\pi}{۲}$ هم $\tan x$ معنا ندارد.

تعریف. تابع با ضابطهٔ $y = f(x)$، وقتی در نقطهٔ $x = x_۰$ پیوسته است که حد چپ وحد راست تابع با مقدار خود تابع در نقطهٔ $x = x_۰$ برابر باشد. به‌این‌ترتیب:

اگر در نقطهٔ $x = x_۰$، تابع بی‌معنا باشد، در این نقطه ناپیوسته است؛

اگر در نقطهٔ $x = x_۰$ تابع معنا داشته‌باشد، ولی حد چپ و حد راست آن برابر نباشد، ناپیوسته است؛

اگر مقدار تابع در نقطهٔ $x = x_۰$ با حد راست (یا حد چپ) آن برابر باشد، ولی با حد چپ (یا راست) آن یکی نباشد، تابع در این نقطه ناپیوسته است.

مثال ۴. تابع با ضابطهٔ $y = [x]$ و نقطهٔ $x = n$ $(n \in \mathbf{N})$ را در نظر می‌گیریم. آیا تابع در این نقطه پیوسته است؟

حل. به‌ازای $x = n$ داریم $y = n$. اگر $x = n - \varepsilon$ $(۰ < \varepsilon < ۱)$، آن‌وقت $y = n - ۱$. اگر $x = n + \varepsilon$ $(۰ < \varepsilon < ۱)$، آن‌وقت $y = n$.

اگر فرض کنیم $y = f(x)$ داریم:

$$\text{حد}_{x \to n^-} f(x) = n - ۱, \quad \text{حد}_{x \to n^+} f(x) = n, \quad f(n) = n$$

حد راست تابع در نقطهٔ $x = n$ با مقدار خود تابع در این نقطه برابر است، ولی با مقدار حد چپ آن فرق دارد. تابع در نقطهٔ $x = n$ ناپیوسته است.

مثال ۵. برای تابع باضابطهٔ $y = \sqrt{\log(\cos x)}$، دامنه و برد را پیدا کنید. روشن کنید، این تابع در همهٔ نقطه‌هایی که وجود دارد، ناپیوسته است.

حل. برای حقیقی بودن تابع باید داشته باشیم:

$$\log(\cos x) \geq ۰$$

ولی می‌دانیم $\log A$ برای $A = ۱$ برابر صفر و برای $A > ۱$ برابر مقدار مثبت است. پس باید داشته باشیم:

$$\cos x \geq ۱$$

ولی $\cos x$ نمی‌تواند بزرگتر از ۱ باشد. بنابراین به‌دست می‌آید:

$$\cos x = ۱ \Rightarrow x = ۲k\pi, \quad (k \in \mathbf{Z})$$

و برای مقدار تابع به‌دست می‌آید:

$$y = \sqrt{\log(\cos ۲k\pi)} = \sqrt{\log ۱} = ۰$$

بنابراین، مجموعه‌ای که دامنهٔ تابع را معین می‌کند (مقدارهای قابل‌قبول برای x)، با برابری $x = ۲k\pi$ $(k \in \mathbf{Z})$ مشخص می‌شود و خود تابع تنها یک مقدار را قبول می‌کند ($y = ۰$). تابع در همهٔ نقطه‌هایی که وجود دارد، یعنی

$$x = \ldots, -۴\pi, -۲\pi, ۰, ۲\pi, ۴\pi, \ldots, ۲k\pi, \ldots$$

ناپیوسته است. نمودار تابع عبارت است از نقطه‌هایی واقع بر محور $x'x$ که هرکدام نسبت به نقطهٔ قبلی خود به فاصلهٔ ۲π قرار دارد.

مثال ۶. ثابت کنید تابع با ضابطهٔ $y = ۳x + ۲$ در نقطهٔ $x = ۱$ پیوسته است.

حل. اگر $y = f(x)$ فرض کنیم، روشن است که

$$f(۱) = ۵$$

می‌خواهیم حد چپ و حد راست $f(x)$ را در نقطهٔ $x = ۱$ پیدا کنیم. $\alpha > ۰$ را عددی بسیار کوچک می‌گیریم. داریم:

$$f(۱ - \alpha) = ۳(۱ - \alpha) + ۲ = ۵ - ۳\alpha$$

هرچه α را کوچکتر بگیریم، مقدار x به ۱ (از سمت چپ) نزدیکتر می‌شود. بنابراین برای حد چپ تابع در نقطهٔ $x = ۱$، داریم:

$$\underset{x \to ۱^-}{\text{حد}} f(x) = \underset{\alpha \to ۰}{\text{حد}} f(۱ - \alpha) = \underset{\alpha \to ۰}{\text{حد}} (۵ - ۳\alpha) = ۵$$

به‌همین ترتیب برای حد راست $f(x)$ در نقطهٔ $x = ۱$ به‌دست می‌آید.

$$\underset{x \to ۱^+}{\text{حد}} f(x) = \underset{\alpha \to ۰}{\text{حد}} f(۱ + \alpha) = \underset{\alpha \to ۰}{\text{حد}} (۵ + ۳\alpha) = ۵$$

در نقطه $x = ۱$، حد چپ و حد راست تابع با هم برابرند و، درضمن، بامقدار تابع در این نقطه یکی هستند. تابع در نقطهٔ $x = ۱$ پیوسته است.

نمودار تابع، یک خط راست است و به‌طور عینی و روی شکل دیده می‌شود، تابع $y = ۳x + ۲$ در همهٔ نقطه‌های خود (و ازجمله نقطهٔ $x = ۱$) پیوسته است.

مثال ۷. حد چپ و حد راست تابع با ضابطهٔ $y = \dfrac{x^۲ - x}{۲|x - ۱|}$ را در نقطهٔ $x = ۱$ پیدا کنید.

حل. برای $x < ۱$ داریم $|x - ۱| = |۱ - x| = -(x - ۱)$؛ درنتیجه با فرض $x \neq ۱$ داریم:

$$\underset{x \to ۱^-}{\text{حد}} \frac{x^۲ - x}{۲|x - ۱|} = \underset{x \to ۱^-}{\text{حد}} \frac{x(x - ۱)}{-۲(x - ۱)} = \underset{x \to ۱^-}{\text{حد}} \left(-\frac{x}{۲}\right) = -\frac{۱}{۲}$$

به‌همین ترتیب، برای $x > ۱$:

$$\underset{x \to ۱^+}{\text{حد}} \frac{x(x - ۱)}{۲(x - ۱)} = \underset{x \to ۱^+}{\text{حد}} \frac{x}{۲} = \frac{۱}{۲}$$

تابع در نقطهٔ $x = ۱$ معنا ندارد؛ حد چپ تابع در این نقطه برابر $-\frac{۱}{۲}$ و حد راست آن برابر $\frac{۱}{۲}$ است. نمودار این تابع را خودتان رسم کنید.

برخی ویژگی‌های مربوط به حد را، بدون اثبات، یادآوری می‌کنیم:

۱) حد مجموع جبری دو یا چند تابع، برابر است با مجموع جبری حدهای آن‌ها:

$$\text{حد}(A + B - C) = \text{حد}\, A + \text{حد}\, B - \text{حد}\, C$$

۲) حد حاصل‌ضرب دو یا چند تابع، برابر است با حاصل‌ضرب حدهای آن‌ها:

$$\text{حد}(A \times B) = \text{حد}\, A \times \text{حد}\, B$$

۳) حد خارج‌قسمت دو تابع، به‌شرط صفر نبودن مخرج، برابر خارج‌قسمت حدهای آن‌ها است:

$$\text{حد}\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{\text{حد}\, A}{\text{حد}\, B} \qquad (B \neq ۰)$$

§۶. صورت‌های مبهم

۱. حالت $\frac{0}{0}$. می‌دانیم اگر برای چندجمله‌ای $f(x)$ داشته باشیم $f(x_0)=0$، به‌معنای آن است که چندجمله‌ای $f(x)$ بر $x-x_0$ بخش‌پذیر است. بنابراین، اگر در کسر $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ داشته باشیم

$$f(x_0)=g(x_0)=0$$

در حالتی که $f(x)$ و $g(x)$، چندجمله‌ای باشند، به‌معنای آن است که صورت و مخرج کسر y را می‌توان بر $x-x_0$ تقسیم کرد. ولی این تقسیم وقتی ممکن است که $x\neq x_0$ (چون صورت و مخرج یک کسر را بر صفر نمی‌توان تقسیم کرد). چنین کسری به‌ازای $x=x_0$ به‌صورت $\frac{0}{0}$ درمی‌آید و، بنابراین، معنا ندارد. ولی اگر $x\neq x_0$، آن‌وقت می‌توان کسر را ساده کرد و، سپس (اگر لازم باشد)، حد کسر را وقتی x به‌سمت x_0 میل می‌کند، به‌دست آورد.

مثال ۱. مطلوب است محاسبهٔ $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{4x^3+3x^2-5x-2}$.

حل. کسر به‌ازای $x=1$ معنا ندارد، زیرا به‌صورت $\frac{0}{0}$ درمی‌آید و تقسیم بر صفر بی‌معنی است. ولی با شرط $x\neq 1$ می‌توان کسر را ساده کرد. داریم:

$$\frac{x^3-1}{4x^3+3x^2-5x-2}=\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(4x^3-4x)+(3x^2-x-2)}=$$

$$=\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{4x(x^2-1)+(x-1)(3x+2)}=$$

$$=\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(4x^2+7x+2)}=\frac{x^2+x+1}{4x^2+7x+2}\quad (x\neq 1)$$

وقتی x به ۱ نزدیک شود (چه از سمت چپ و چه از سمت راست)، حد کسر اصلی با حد کسر ساده‌شده یکی است. بنابراین

$$\underset{x\to ۱}{\text{حد}} \frac{x^۳ - ۱}{۴x^۳ + ۳x^۲ - ۵x - ۲} = \underset{x\to ۱}{\text{حد}} \frac{x^۲ + x + ۱}{۴x^۲ + ۷x + ۲} = \frac{۳}{۱۳}$$

یادداشت. وقتی بدانیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $x - a$ بخش‌پذیر است، با روش ساده‌ای می‌توان $f(x)$ را تجزیه و عامل $x - a$ را ظاهر کرد. به این نمونه توجه کنید.

مثال ۲. کسر $y = \dfrac{x^۳ + ۳x^۲ - ۵x - ۱۴}{x^۴ + ۷x - ۲}$ را ساده کنید.

حل. چندجمله‌ای با ضریب‌های درست

$$ax^n + bx^{n-۱} + \ldots + mx + l$$

اگر ریشهٔ درست داشته باشد، این ریشه، یکی از بخشیاب‌های عدد l است. فرض کنید، عدد درست $A \neq ۰$ یکی از ریشه‌های این چندجمله‌ای باشد، یعنی $x = A \neq ۰$، این چندجمله‌ای را برابر صفر کند:

$$aA^n + bA^{n-۱} + \ldots + mA + l = ۰$$

با تقسیم دو طرف برابری بر عدد A به‌دست می‌آید:

$$aA^{n-۱} + bA^{n-۲} + \ldots + m = -\frac{l}{A}, \; (A \neq ۰)$$

a، b، ... و m (ضریب‌های چندجمله‌ای) عددهای درستی هستند، A را هم عددی درست فرض کردیم، پس حاصل سمت چپ برابری عددی درست است، یعنی $\frac{l}{A}$ هم باید عددی درست و l بر A بخش‌پذیر باشد.

در کسر y، مقدار ثابت مخرج، برابر است با $-2 \neq 0$. عدد -2 بر ± 1 و ± 2 بخش‌پذیر است. با آزمایش معلوم می‌شود که تنها $x = -2$ چندجمله‌ای مخرج را صفر می‌کند. اگر کسر ساده‌شدنی باشد، باید $x = -2$، صورت y را صفر کند و آزمایش نشان می‌دهد که به‌واقع، $x = -2$ ریشه‌ای از صورت کسر y است. به‌این‌ترتیب صورت و مخرج دارای عامل $x + 2$ هستند. این عامل را ابتدا در صورت کسر ظاهر می‌کنیم. نخستین جملهٔ صورت یعنی x^3 را به‌صورت

$$x^2(x + 2)$$

می‌نویسیم. در این‌جا، به‌جای $3x^2$ که در چندجمله‌ای وجود دارد، $2x^2$ نوشته‌ایم. باید x^2 را به آن اضافه کنیم:

$$x^2(x + 2) + x(x + 2)$$

(توجه کردید: به‌جای x^2 نوشتیم $x(x + 2)$). ما به $-5x$ نیاز داریم، ولی نوشته‌ایم $2x$، باید $-7x$ را به‌دنبال آن بنویسیم که آن را به‌صورت $-7(x + 2)$ می‌نویسیم و عبارت صورت کسرِ y چنین می‌شود:

$$x^3 + 3x^2 - 5x - 14 = x^2(x + 2) + x(x + 2) -$$
$$-7(x + 2) = (x + 2)(x^2 + x - 7)$$

به‌همین ترتیب، عامل $x + 2$ را در چندجمله‌ای مخرج هم ظاهر می‌کنیم:

$$x^4 + 7x - 2 = x^3(x + 2) - 2x^2(x + 2) + 4x(x + 2) -$$
$$-(x + 2) = (x + 2)(x^3 - 2x^2 + 4x - 1)$$

و کسر y، با شرط $x \neq -2$ به‌این صورت ساده می‌شود:

$$y = \frac{(x + 2)(x^2 + x - 7)}{(x + 2)(x^3 - 2x^2 + 4x - 1)} = \frac{x^2 + x - 7}{x^3 - 2x^2 + 4x - 1}$$

و اگر می‌خواستیم حد y را، وقتی x به‌سمت ۲− میل می‌کند، به‌دست آوریم:

$$\lim_{x\to -۲} y = \lim_{x\to -۲} \frac{x^۲ + x - ۷}{x^۳ - ۲x^۲ + ۴x - ۱} = \frac{۱}{۵}$$

۲. وقتی‌که در حالت $\frac{۰}{۰}$، صورت یا مخرج یا هر دو، عبارت‌هایی گنگ باشند. در این حالت، برای رفع ابهام، باید در آغاز، صورت یا مخرج را (هرکدام که گنگ باشند) و یا هردو را (اگر هم صورت و هم مخرج گنگ است) گویا کرد. با چند نمونه، حالت‌های مختلف را روشن می‌کنیم.

مثال ۳. مطلوب است محاسبه $\lim_{x\to ۲} \frac{۳x - \sqrt{x^۲ + ۱۳x + ۶}}{x^۲ - ۴}$.

حل. این کسر به‌ازای $x = ۲$ به‌صورت $\frac{۰}{۰}$ درمی‌آید. برای رفع ابهام، در آغاز صورت و مخرج کسر را در مزدوج صورت ضرب می‌کنیم، تا صورت کسر گویا شود:

$$y = \frac{(۳x - \sqrt{x^۲ + ۱۳x + ۶})(۳x + \sqrt{x^۲ + ۱۳x + ۶})}{(x^۲ - ۴)(۳x + \sqrt{x^۲ + ۱۳x + ۶})} =$$

$$= \frac{۹x^۲ - (x^۲ + ۱۳x + ۶)}{(x^۲ - ۴)(۳x + \sqrt{x^۲ + ۱۳x + ۶})} =$$

$$= \frac{۸x^۲ - ۱۳x - ۶}{(x^۲ - ۴)(۳x + \sqrt{x^۲ + ۱۳x + ۶})} =$$

$$= \frac{(x - ۲)(۸x + ۳)}{(x - ۲)(x + ۲)(۳x + \sqrt{x^۲ + ۱۳x + ۶})} =$$

$$= \frac{۸x + ۳}{(x + ۲)(۳x + \sqrt{x^۲ + ۱۳x + ۶})} (x \neq ۲)$$

که اگر $x = ۲$ بگیریم (یعنی در واقع x را به‌سمت ۲ میل دهیم)، حد کسر به‌دست می‌آید و اگر کسر را y بنامیم.

$$\lim_{x\to ۲} y = \frac{۱۹}{۴۸}$$

مثال ۴. مطلوب است $\lim_{x\to ۱} \frac{\sqrt{x+۳}-x-۱}{\sqrt{۲x+۷}-۳}$.

حل. صورت و مخرج، به‌ازای $x = ۱$، برابر صفر می‌شوند. صورت و مخرج کسر را هم در مزدوج صورت و هم در مزدوج مخرج، یعنی در

$$(\sqrt{x+۳}+x+۱)(\sqrt{۲x+۷}+۳)$$

ضرب می‌کنیم، به‌این‌صورت درمی‌آید:

$$\frac{-(x-۱)(x+۲)(\sqrt{۲x+۷}+۳)}{۲(x-۱)(\sqrt{x+۳}+x+۱)}$$

که با حذف $x - ۱$ از صورت و مخرج (بافرض $x \neq ۱$) و سپس میل x به‌سمت ۱ (یعنی در واقع قرار دادن $x = ۱$) به‌دست می‌آید:

$$\lim_{x\to ۱} \frac{\sqrt{x+۳}-x-۱}{\sqrt{۲x+۷}-۳} = -\frac{۹}{۴}$$

مثال ۵. مطلوب است محاسبهٔ $\lim_{x\to ۳} \frac{x^{۲}-۲x-۳}{\sqrt[۳]{x+۵}-۲}$.

حل. چون کسر به‌ازای $x = ۳$ به‌صورت $\frac{۰}{۰}$ درمی‌آید، باید ابتدا مخرج کسر را گویا کرد.

مخرج کسر به‌صورت $\sqrt[۳]{a} - b$ است. برای این‌که جملهٔ گنگ از ریشهٔ سوم آزاد شود، باید آن را در عبارت $\sqrt[۳]{a^{۲}} + b\sqrt[۳]{a} + b^{۲}$ ضرب کرد. بنابراین صورت و مخرج کسر را در

$$\sqrt[۳]{(x+۵)^{۲}} + ۲\sqrt[۳]{x+۵} + ۴$$

ضرب می‌کنیم، کسر به‌این‌صورت درمی‌آید:

$$\frac{(x^{۲} - ۲x - ۳)(\sqrt[۳]{(x + ۵)^{۲}} + ۲\sqrt[۳]{x + ۵} + ۴)}{(x + ۵) - ۸}$$

که پس از ساده کردن چنین می‌شود:

$$\frac{(x - ۳)(x + ۱)(\sqrt[۳]{(x + ۵)^{۲}} + ۲\sqrt[۳]{x + ۵} + ۴)}{x - ۳}$$

$x - ۳$ را، با فرض $x \neq ۳$ از صورت و مخرج حذف می‌کنیم و، سپس x را به‌سمت ۳ میل می‌دهیم، به‌دست می‌آید:

$$\underset{x \to ۳}{\text{حد}} \frac{x^{۲} - ۲x - ۳}{\sqrt[۳]{x + ۵} - ۳} = ۴۸$$

۳. حالت $\frac{\infty}{\infty}$. پیش از همه یادآور می‌شویم، وقتی با یک چندجمله‌ای سروکار داشته‌باشیم، حد عبارت، وقتی x به‌سمت $+\infty$ یا $-\infty$ میل می‌کند، با حد جملهٔ با بزرگترین درجه، یکی است. درواقع، فرض کنید:

$$f(x) = ax^{n} + bx^{n-۱} + cx^{n-۲} + \ldots + mx + l$$

اگر در این چندجمله‌ای، از جملهٔ با بزرگترین درجه فاکتور بگیریم:

$$f(x) = ax^{n}\left(۱ + \frac{b}{ax} + \frac{c}{ax^{۲}} + \ldots + \frac{m}{ax^{n-۱}} + \frac{l}{ax^{n}}\right)$$

اگر x به‌سمت $+\infty$ یا $-\infty$ میل کند، همهٔ جمله‌های داخل پرانتز (به‌جز جملهٔ اول) به‌سمت صفر میل می‌کنند. بنابراین

$$\underset{x \to \pm\infty}{\text{حد}} f(x) = \underset{x \to \pm\infty}{\text{حد}} (ax^{n})$$

با این مقدمه به‌سادگی می‌توان کسرهای به‌صورت $\frac{\infty}{\infty}$ را، وقتی صورت و مخرج کسر چندجمله‌ای هستند، رفع ابهام کرد.

مثال ۶. مطلوب است $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{۳x^۲ + ۴x + ۱}{۵x^۲ - ۳x + ۲}$

حل. باتوجه به آن‌چه هم‌اکنون گفتیم، داریم:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{۳x^۲ + ۴x + ۱}{۵x^۲ - ۳x + ۲} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^۲\left(۳ + \frac{۴}{x} + \frac{۱}{x^۲}\right)}{x^۲\left(۵ - \frac{۳}{x} + \frac{۲}{x^۲}\right)} = \frac{۳}{۵}$$

با حذف $x^۲$ از صورت و مخرج و باتوجه به این‌که حد کسر $\frac{a}{x^m}$ (وقتی a عددی ثابت باشد و x به‌سمت بی‌نهایت میل کند، برابر صفر است، حد کسر برابر $\frac{۳}{۵}$ می‌شود، یعنی، وقتی صورت و مخرج یک کسر هم‌درجه باشند، با میل x به‌سمت $+\infty$ یا $-\infty$، حد کسر برابر نسبت ضریب بزرگترین درجه صورت به ضریب بزرگترین درجهٔ مخرج می‌شود.

مثال ۷. مطلوب است محاسبهٔ حد کسر

$$y = \frac{ax^n + bx^{n-۱} + \ldots + l}{a'x^m + b'x^{m-۱} + \ldots + l'}$$

وقتی $x \to \pm\infty$.

حل. دیدیم، اگر $n = m$، آن‌وقت $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = \frac{a}{a'}$.

اگر $m > n$ (یعنی مخرج، درجهٔ بزرگتری داشته باشد) آن‌وقت

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^n\left(a + \frac{b}{x} + \ldots + \frac{l}{x^n}\right)}{x^m\left(a' + \frac{b'}{x} + \ldots + \frac{l'}{x^m}\right)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a}{a'x^{m-n}} = ۰$$

یعنی، وقتی درجهٔ صورت کسر از درجهٔ مخرج آن کوچکتر باشد، حد کسر y برابر صفر است (وقتی $x \to \pm\infty$).

اگر $n > m$، حد کسر منجر به این حد می‌شود. با شرط $\frac{a}{a'} > ۰$ داریم:

$$\underset{x\to\pm\infty}{\text{حد}} \frac{ax^{n-m}}{a'} = \begin{cases} +\infty & (n-m=۲k) \\ \pm\infty & (n-m=۲k+۱) \end{cases}$$

مثال ۸. مطلوب است محاسبهٔ حد کسر $y = \frac{x+\sqrt{۳x}}{\sqrt{x}-۲x}$، وقتی $x \to +\infty$.

حل. x نمی‌تواند منفی باشد، چون دراین‌صورت $\sqrt{۳x}$ و $\sqrt{x}$ مقدارهایی موهومی می‌شوند. به‌همین مناسبت x تنها می‌تواند به‌سمت $+\infty$ میل کند.

بزرگترین درجه را در صورت کسر جملهٔ x و در مخرج کسر جملهٔ $-۲x$ دارد، یعنی صورت و مخرج هم‌درجه‌اند و حد کسر برابر نسبت ضریب بزرگترین درجه صورت بر ضریب بزرگترین درجهٔ مخرج می‌شود:

$$\underset{x\to+\infty}{\text{حد}} \frac{x+\sqrt{۳x}}{\sqrt{x}-۲x} = -\frac{۱}{۲}$$

۴. حالت $\infty - \infty$. دوباره یادآوری می‌کنیم:

۱) اگر در یک چندجمله‌ای نسبت به متغیر x، مقدار x به‌سمت بی‌نهایت ($+\infty$ یا $-\infty$) میل کند، حد عبارت با حد جملهٔ بزرگترین درجه، یکی است.

۲) اگر در یک چندجمله‌ای نسبت به متغیر x، دو جمله وجود داشته باشد، که درجهٔ آن‌ها بزرگترین و باهم برابر باشد، وقتی x به‌سمت بی‌نهایت میل کند، حد عبارت با حد جملهٔ بزرگترین درجه‌ای که، ضرب آن از لحاظ قدرمطلق بیشتر است، برابر است.

مثال ۹. مطلوب است محاسبهٔ $\lim_{x\to\infty}(x - \sqrt{۲x + ۳})$.

حل. جملهٔ x با درجهٔ ۱ و جملهٔ $\sqrt{۲x + ۳}$ با درجهٔ $\frac{۱}{۲}$ است، بنابراین

$$\lim_{x\to+\infty}(x - \sqrt{۲x + ۳}) = \lim_{x\to\infty} x = +\infty$$

مثال ۱۰. مطلوب است محاسبهٔ $\lim_{x\to\pm\infty}(x - \sqrt{۲x^۲ + ۳x + ۱})$

حل. جملهٔ x از درجهٔ اول و جملهٔ $-\sqrt{۲x^۲ + ۳x + ۱}$ هم از درجهٔ اول است. ولی در اولی ضریب x برابر ۱ و در دومی برابر $-\sqrt{۲}$ است و $|-\sqrt{۲}| > ۱$، پس

$$\lim_{x\to\pm\infty}(x-\sqrt{۲x^۲ + ۳x + ۱}) = \lim_{x\to\pm\infty}(-\sqrt{۲x^۲ + ۳x + ۱}) = -\infty$$

یادداشت. اگر در یک عبارت بیش از دو جمله وجود داشته باشد که بزرگترین درجهٔ عبارت را نسبت به متغیر x تشکیل دهند، باید ضریب‌های آن را جمع جبری کرد و علامت حاصل‌جمع را ملاک قرار داد.

مثال ۱۱. مطلوب است محاسبهٔ

$$\lim_{x\to\pm\infty}(x + \sqrt{x^۲ + ۲x} - \sqrt{۵x^۲ + ۳})$$

حل. سه جملهٔ x، $\sqrt{x^۲ + ۲x}$ و $-\sqrt{۵x^۲ + ۳}$ از درجهٔ اول‌اند؛ ضریب‌های این جمله‌های درجه اول، به‌ترتیب برابرند با ۱+، ۱+ و $-\sqrt{۵}$ و مجموع جبری آن‌ها، یعنی $۲ - \sqrt{۵}$ عددی منفی است، بنابراین

$$\lim_{x\to\pm\infty}(x + \sqrt{x^۲ + ۲x} - \sqrt{۵x^۲ + ۳}) = -\infty$$

مثال ۱۲. مطلوب است $\lim_{x\to\pm\infty}(۲x - \sqrt{۴x^۲ + x + ۱})$.

حل. در این‌جا جمله‌های $۲x$ و $\sqrt{۴x^۲ + x + ۱}$، هردو از درجهٔ اول و با ضریب‌های برابر (از لحاظ قدرمطلق) هستند. روشن است، وقتی x

مقداری منفی باشد، هم $2x$ و هم $-\sqrt{4x^2+x+1}$ مقدارهایی منفی می‌شوند، پس

$$\lim_{x\to-\infty}\left(2x-\sqrt{4x^3+x+1}\right)=-\infty$$

ولی وقتی x به‌سمت $+\infty$ میل کند، به‌صورت $\infty-\infty$ درمی‌آید و دو جمله از لحاظ درجه و قدرمطلق ضریب‌ها، هیچ مزیتی بر یکدیگر ندارند. در این حالت، باید مخرجی برابر واحد برای عبارت در نظر گرفت و، سپس، صورت کسر را گویا کرد. اگر عبارت را y بنامیم، داریم:

$$\begin{aligned} y &= \frac{2x-\sqrt{4x^2+x+1}}{1}= \\ &= \frac{\left(2x-\sqrt{4x^2+x+1}\right)\left(2x+\sqrt{4x^2+x+1}\right)}{2x+\sqrt{4x^2+x+1}}= \\ &= \frac{4x^2-\left(4x^2+x+1\right)}{2x+\sqrt{4x^2+x+1}}=\frac{-x-1}{2x+\sqrt{4x^2+x+1}} \end{aligned}$$

صورت و مخرج کسر از درجهٔ اول‌اند، ضریب x در صورت کسر برابر -1 و در مخرج کسر برابر $(2+\sqrt{4})$ یعنی ۴ است، پس

$$\lim_{x\to+\infty}\left(2x-\sqrt{4x^2+x+1}\right)=-\frac{1}{4}$$

مثال ۱۳. مطلوب است

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(x+\sqrt{x^2+5x-1}\right)$$

حل. وقتی x به‌سمت $+\infty$ میل کند، با صورت مبهم برخورد نمی‌کنیم و به‌روشنی داریم:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt{x^2+5x-1}\right)=+\infty$$

ولی وقتی x به‌سمت $-\infty$ میل کند، عبارت به‌صورت مبهم $-\infty + \infty$ درمی‌آید. اگر عبارت را با مخرج واحد در نظر بگیریم و صورت و مخرج را در مزدوج صورت ضرب کنیم، به‌ترتیب داریم:

$$\lim_{x \to -\infty}\left(x + \sqrt{x^{2} + 5x - 1}\right) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^{2} - (x^{2} + 5x - 1)}{x - \sqrt{x^{2} + 5x - 1}} =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{-5x + 1}{x - \sqrt{x^{2} + 5x - 1}}$$

ضریب x در صورت کسر برابر -5 است، ولی برای ضریب x در مخرج کسر باید توجه داشت که x مقداری منفی است (چون x به‌سمت $-\infty$ میل می‌کند). وقتی $x < 0$، آن‌وقت $\sqrt{x^{2}} = -x$ و ضریب x در مخرج کسر برابر است با ۲، یعنی

$$\lim_{x \to -\infty}\left(x + \sqrt{x^{2} + 5x - 1}\right) = -\frac{5}{2}$$

یادداشت. در این‌گونه حالت‌ها (یعنی وقتی $x \to -\infty$ و، درضمن عبارت اصلی به‌صورت $\infty - \infty$ درمی‌آید)، بهتر است، برای جلوگیری از اشتباه، در صورت و مخرج از بزرگترین درجهٔ x فاکتور بگیریم.

$$\frac{-5x + 1}{x - \sqrt{x^{2} + 5x - 1}} = \frac{x\left(-5 + \frac{1}{x}\right)}{x - |x|\sqrt{1 + \frac{5}{x} - \frac{1}{x^{2}}}}$$

زیر رادیکال از x^{2} فاکتور گرفتیم، ولی $\sqrt{x^{2}} = |x|$. و چون برای ما x

منفی است، کسر چنین می‌شود:

$$\frac{x\left(-۵+\frac{۱}{x}\right)}{x-(-x)\sqrt{۱+\frac{۵}{x}-\frac{۱}{x^{۲}}}}=\frac{x\left(-۵+\frac{۱}{x}\right)}{x\left(۱+\sqrt{۱+\frac{۵}{x}-\frac{۱}{x^{۲}}}\right)}=$$

$$=\frac{-۵+\frac{۱}{x}}{۱+\sqrt{۱+\frac{۵}{x}-\frac{۱}{x^{۲}}}}$$

و روشن است، وقتی مقدار x به‌سمت $-\infty$ میل کند، کسر برابر $-\frac{۵}{۲}$ می‌شود.

مثال ۱۴. مطلوب است محاسبهٔ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt[۳]{x^{۳}+۳x^{۲}-۱}-x\right)$.

حل. اگر عبارت مفروض را y بنامیم، به‌ترتیب داریم:

$$y=\frac{\left(\sqrt[۳]{x^{۳}+۳x^{۲}-۱}-x\right)\left(\sqrt[۳]{(x^{۳}+۳x-۱)^{۲}}+x\sqrt[۳]{x^{۳}+۳x^{۲}-۱}+x^{۲}\right)}{\sqrt[۳]{(x^{۳}+۳x^{۲}-۱)^{۲}}+x\sqrt[۳]{x^{۳}+۳x^{۲}-۱}+x^{۲}}$$

$$=\frac{(x^{۳}+۳x^{۲}-۱)-x^{۳}}{\sqrt[۳]{(x^{۳}+۳x^{۲}-۱)^{۲}}+x\sqrt[۳]{x^{۳}+۳x^{۲}-۱}+x^{۲}}=$$

$$=\frac{x^{۲}\left(۳-\frac{۱}{x^{۲}}\right)}{x^{۲}\left(\sqrt[۳]{\left(۱+\frac{۳}{x}-\frac{۱}{x^{۳}}\right)^{۲}}+\sqrt{۱+\frac{۳}{x}-\frac{۱}{x^{۳}}}+۱\right)}$$

و بنابراین $\underset{x\to\pm\infty}{\text{حد}}\, y = ۱$. توجه کردید، برای گویا کردن صورت کسر y، از این اتحاد استفاده کردیم:

$$(a-b)(a^۲+ab+b^۲)=a^۳-b^۳$$

مثال ۱۵. مطلوب است محاسبهٔ

$$\underset{x\to\pm\infty}{\text{حد}}\left(\sqrt[۴]{x^۴+۳x^۳-۲x+۱}-x\right)$$

حل. وقتی x به‌سمت $-\infty$ میل کند، پاسخ به‌روشنی معلوم است:

$$\underset{x\to-\infty}{\text{حد}}\left(\sqrt[۴]{x^۴+۳x^۳-۲x+۱}-x\right)=+\infty$$

ولی وقتی $x\to+\infty$، باید از گویا کردن استفاده کنیم. عبارت را y می‌نامیم، داریم:

$$y=\frac{\sqrt{x^۴+۳x^۳-۲x+۱}-x^۲}{\sqrt[۴]{x^۴+۳x^۳-۲x+۱}+x}=$$

$$\frac{(x^۴+۳x^۳-۲x+۱)-x^۴}{\left(\sqrt[۴]{x^۴+۳x^۳-۲x+۱}+x\right)\left(\sqrt{x^۴+۳x^۳-۲x+۱}+x^۲\right)}=$$

$$=\frac{x^۳\left(۳-\frac{۲}{x^۲}+\frac{۱}{x^۳}\right)}{x\left(\sqrt[۴]{۱+\frac{۳}{x}-\frac{۲}{x^۳}+\frac{۱}{x^۴}}+۱\right)\cdot x^۲\left(\sqrt{۱+\frac{۳}{x}-\frac{۲}{x^۳}+\frac{۱}{x^۴}}+۱\right)}=$$

$$=\frac{۳-\frac{۲}{x^۲}+\frac{۱}{x^۳}}{\left(\sqrt[۴]{۱+\frac{۳}{x}-\frac{۲}{x^۳}+\frac{۱}{x^۴}}+۱\right)\left(\sqrt{۱+\frac{۳}{x}-\frac{۲}{x^۳}+\frac{۱}{x^۴}}+۱\right)}$$

و بنابراین $\lim\limits_{x\to+\infty} y = \frac{۳}{۴}$ (چون $x > ۰$ ($x \to +\infty$)، $\sqrt[۲]{x^۴}$ و $\sqrt{x^۲}$ برابر x می‌شوند).

تمرین‌ها

۴۹. حد این تابع‌ها را پیدا کنید:

$$۱)\ y = \frac{۳x^۲ + ۵x - ۱}{۲x^۲ - ۷x + ۳},\ x \to \pm\infty;$$

$$۲)\ y = \frac{x^۳ - ۱}{x^۳ + ۱},\ x \to \pm\infty;$$

$$۳)\ y = \frac{۳x - ۱}{x^۲ + ۱},\ x \to \pm\infty;$$

$$۴)\ y = \frac{۵x^۴ - ۱}{x^۲ + ۳x},\ x \to \pm\infty;$$

$$۵)\ y = \frac{\sqrt{x} - ۶}{۳x + ۱},\ x \to +\infty;$$

$$۶)\ y = \frac{۷x^۳ + ۱}{۴x^۲ - ۲x + ۵},\ y \to \pm\infty;$$

$$۷)\ y = \frac{x^۲ - ۹}{x^۲ - ۳x},\ x \to ۳;$$

$$۸)\ y = \frac{x^۲ - x - ۲}{x^۳ + ۱},\ y \to -۱;$$

$$۹)\ y = \frac{۹ - x^۲}{\sqrt{۳x} - ۳},\ x \to ۳;$$

$$۱۰)\ y = \frac{x^۳ - x^۲ - x + ۱}{x^۳ + x^۲ - x - ۱},\ x \to ۱;$$

$$۱۱)\ y = \frac{\sqrt{x + ۴} - ۲}{x},\ x \to ۰;$$

$$۱۲)\ y = \frac{\sqrt{۴ + x + x^۲} - ۲}{x + ۱},\ x \to -۱;$$

$$۱۳)\ y = \frac{\sqrt{۱ + x} - \sqrt{۱ - x}}{x},\ x \to ۰;$$

$$۱۴)\ y = \frac{\sqrt{۱ + x + x^۲} - \sqrt{۷ + ۲x - x^۲}}{x^۲ - ۲x},\ x \to ۲;$$

$$۱۵)\ y = \frac{\sqrt{x^۲ + x + ۲} - ۳\sqrt{۲x^۲ + x + ۱} + ۴}{x^۲ - ۳x + ۲},\ x \to ۱;$$

$$۱۶)\ y = \frac{(۱ + x)^m - ۱}{x},\ x \to ۰$$

۵۰. این حدها را محاسبه کنید:

$$۱)\ y = \sqrt{x^۲ + ۸x + ۳} - \sqrt{x^۲ + ۴x + ۳},\ x \to \pm\infty,$$

$$۲)\ y = \frac{۱}{x - ۱} - \frac{۱}{x^۲ - ۱},\ x \to ۱;$$

$$۳)\ y = \sqrt{x^۲ + ۳x} - x,\ x \to \pm\infty;$$

$$۴)\ y = \sqrt{x^۲ + x + ۱} - \sqrt{x^۲ - x},\ x \to \pm\infty;$$

$$۵)\ y = x - \sqrt{x^۲ - a^۲},\ x \to \pm\infty;$$

$$۶)\ y = \frac{۱}{x - ۲} - \frac{۴}{x^۲ - ۴},\ x \to ۲;$$

$$۷)\ y = \frac{۱}{x - ۲} - \frac{۱۲}{x^۳ - ۸},\ x \to ۲;$$

$$۸)\ y = \sqrt{x^۲ - ۱} - \sqrt{x^۲ - ۴x},\ x \to \pm\infty;$$

$$۹)\ y = \sqrt[۳]{۲x^۳ + x^۲} - \sqrt[۳]{۲x^۳ - ۳x + ۱},\ x \to \pm\infty;$$

$$۱۰)\ y = \sqrt[۴]{x^۴ + x^۳ + ۱} - \sqrt[۴]{x^۴ - x^۲ - ۱},\ x \to \pm\infty$$

$$۱۱)\ y = x - \sqrt[۴]{x^۴ + x^۳ - ۱},\ x \to \pm\infty;$$

$$۱۲)\ y = \sqrt[۵]{x^۵ + ۴x^۴ - ۲} - x,\ x \to \pm\infty$$

*۵۱. مطلوب است محاسبهٔ

$$\underset{x\to ۱}{\text{حد}} \frac{(x-۱)^{n-۱}}{(\sqrt{x}-۱)(\sqrt[۳]{x}-۱)(\sqrt[۴]{x}-۱)\dots(\sqrt[n]{x}-۱)}$$

۵۲. تابع‌های با ضابطهٔ مفروض، در چه نقطه‌هایی ناپیوسته‌اند؟ حد چپ و حد راست تابع را در این نقطه‌ها پیدا کنید.

$$۱)\ y = \frac{۱}{x}; \qquad ۲)\ y = \frac{x-۱}{x+۲}$$

$$۳)\ y = \frac{x}{x^۲ - ۷x + ۱۲}; \qquad ۴)\ y = \frac{x^۳ - x^۲}{۲|x-۱|};$$

$$۵)\ y = \frac{x|x+۱|}{|x|}; \qquad ۶)\ f(x) = \begin{cases} \sin x & (x \leq ۰) \\ x - ۱ & (x > ۰) \end{cases}$$

$$*۷)\ y = \left(\sqrt{\frac{۱+\cos x}{۱-\cos x}} - \sqrt{\frac{۱-\cos x}{۱+\cos x}}\right)\left(\sqrt{\frac{۱+\sin x}{۱-\sin x}} - \sqrt{\frac{۱-\sin x}{۱+\sin x}}\right)$$

$$۸) y = \begin{cases} x & (x > -۱) \\ x - ۱ & (x \leq -۱) \end{cases},\ ۹)\ y = \begin{cases} \dfrac{\sin ۲x}{\sqrt{۱-\cos ۲x}} & (x \neq ۰) \\ \sqrt{۲} & (x = ۰) \end{cases}$$

*۵۳. به‌یاری تعریف حد دنباله‌ها، ثابت کنید حد دنبالهٔ

$$\frac{۵}{۳}, \frac{۷}{۵}, \frac{۹}{۷}, \frac{۱۱}{۹}, \dots, \frac{۲n+۳}{۲n+۱}, \dots$$

برابر است با ۱.

*۵۴. مطلوب است محاسبهٔ $\underset{n\to\infty}{\text{حد}} \left(\frac{n+۵}{n+۲}\right)^n$.

۵۵. این حدها را پیدا کنید:

$$۱)\ \underset{x\to ۰}{\text{حد}} \frac{\tan x}{x}, \qquad ۲)\ \underset{x\to ۰}{\text{حد}} \frac{\sin ۳x}{\sin ۲x}$$

$$۳)\ \underset{x\to ۱}{\text{حد}} \frac{x^{۲۰۰} - ۲x + ۱}{x^{۱۰۰} - ۲x + ۱}, \qquad ۴)\ \underset{x\to \pi}{\text{حد}} \frac{\sin ۳x}{\sin ۲x},$$

$$۵)\ \underset{a\to b}{\text{حد}} \frac{\sqrt[m]{a} - \sqrt[m]{b}}{\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}}\ (m \neq n),$$

$$۶)\ \underset{x\to ۰}{\text{حد}} \frac{۱ + \sin x - \cos x}{۱ + \sin ۲x - \cos ۲x},$$

$$۷)\ \underset{x\to ۰}{\text{حد}} \frac{\cos x - \cos ۳x}{x^۲},$$

$$۸)\ \underset{x\to \frac{\pi}{۴}}{\text{حد}} \tan ۲x \tan\left(\frac{\pi}{۴} - x\right),$$

$$۹)\ \underset{x\to ۱}{\text{حد}} (۱ - x) \tan\left(\frac{\pi}{۲}x\right),$$

$$*۱۰)\ \underset{x\to ۰}{\text{حد}} \frac{۱ - \sqrt{\cos x}}{۱ - \cos\sqrt{x}},$$

$$*۱۱)\ \underset{n\to\infty}{\text{حد}} \left(\cos\frac{x}{۲} \cos\frac{x}{۴} \cos\frac{x}{۸} \ldots \cos\frac{x}{۲^n}\right),$$

$$۱۲)\ \underset{x\to \frac{\pi}{۴}}{\text{حد}} \frac{\sqrt[۳]{\tan x} - ۱}{۲\sin^۲ x - ۱},$$

$$۱۳)\ \underset{x\to ۱}{\text{حد}} \sqrt{\frac{x^{۲m^۲} - ۱}{x^{۲n^۲} - ۱}}\ (m, n \in \mathbf{N});$$

۵۶. m و n را طوری پیدا کنید که داشته‌باشیم:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^{۲}+۱}{x+۱}-mx-n\right)=۰$$

۵۷. p و q را طوری پیدا کنید که تابع با ضابطهٔ

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{px}{|x|}-۱ & (x>۰)\\ q+\left[x-\dfrac{\pi}{۲}\right] & (x=۰)\\ [x]+۴ & (x<۰)\end{cases}$$

در نقطه $x=۰$ پیوسته باشد. $|a|$ به‌معنای قدرمطلق a و $[a]$ به‌معنای بخش درست عدد a است.

۵۸. m و n را طوری پیدا کنید که تابع با ضابطهٔ

$$f(x)=\begin{cases}۵+\cos x & \left(x\geq\dfrac{\pi}{۲}\right)\\ ۲m\sin x+n & \left(-\dfrac{\pi}{۲}<x<\dfrac{\pi}{۲}\right)\\ -۲\sin x & \left(x\leq-\dfrac{\pi}{۲}\right)\end{cases}$$

در نقطه‌های $x=\frac{\pi}{۲}$ و $x=-\frac{\pi}{۲}$ پیوسته باشد.

۵۹. a، b، c و d را طوری پیدا کنید که داشته باشیم:

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^{۲}-x+۱}-ax+b)=۰,$$
$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^{۲}-x+۱}-cx-d)=۰$$

۶۰. مطلوب است محاسبهٔ

$$\lim_{x\to۰}\frac{\sin(۲x+a)-۲\sin(x+a)+\sin a}{x^{۲}}$$

۶۱. $\underset{x\to ۰}{\text{حد}} \frac{[x]}{x}$ و $\underset{x\to ۰}{\text{حد}} \frac{x}{[x]}$ را به‌دست آورید. $[x]$ به‌معنای بخش درست x است.

* ۶۲. برای دنباله‌ای با جملهٔ عمومی x_n می‌دانیم: $\underset{n\to\infty}{\text{حد}} x_n = ۰$ ثابت کنید:

$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}} \frac{x_۱ + x_۲ + \ldots + x_n}{n} = ۰$$

* ۶۳. برای دنبالهٔ با جملهٔ عمومی

$$a_n = \sqrt{۲ + \sqrt[۳]{۳ + \sqrt[۴]{۴ + \ldots + \sqrt[n]{n}}}}$$

ثابت کنید: a_n دارای حدی است که از ۲ کوچکتر ولی از ۱/۹ بزرگتر است.

* ۶۴. آیا $\underset{x\to ۰}{\text{حد}}\, x\left[\frac{۱}{x}\right]$ وجود دارد؟ $[A]$، یعنی بخش درست عدد A.

۶۵. مطلوب است محاسبهٔ

$$۱)\ \underset{x\to ۲}{\text{حد}} \frac{[x^۲] - ۴}{x^۲ - ۴}; \qquad ۲)\ \underset{x\to ۱}{\text{حد}} \frac{|x^۲ - ۳x + ۲|}{\sqrt{x} - ۱}$$

۳. مشتق

§۱. مقدارهای بسیار کوچک

۱. تا این‌جا بارها به جمله‌هایی برخوردیم که، در آن‌ها، از مقدارهای بسیار کوچک یا **بی‌نهایت کوچک‌ها** صحبت شده بود. وقتی x را به‌سمت ۲ میل می‌دهیم، یعنی تفاوت آن را با x، بسیار کوچک می‌گیریم. اگر x بزرگتر از ۲ باشد و به‌سمت ۲ میل کند، این بی‌نهایت کوچک مقداری مثبت است و در حالتی که x از ۲ کوچکتر باشد و به‌سمت ۲ میل کند، این اختلاف منفی است.

روشن است که در برابر عددهای معمولی، می‌توان از بی‌نهایت کوچک‌ها صرف‌نظر کرد، در واقع اگر داشته باشیم:

$$a = ۱۰ + ۰/۰۰۰۰۰۱, \quad b = ۵ - \frac{۱}{۱۰^۶}$$

می‌توانیم درعمل $a = ۱۰$ و $b = ۵$ به‌حساب آوریم. ولی اگر عدد بی‌نهایت کوچک را در عدد معمولی ضرب کنیم، یک بی‌نهایت کوچک به‌دست می‌آید:

$$\frac{۱}{۱۰^۷} \times ۱۰۰ = \frac{۱}{۱۰^۵}$$

که عددی بسیار کوچک است. باید مواظب باشیم که از تقسیم دو عدد بسیار کوچک بر یکدیگر، ممکن است نتیجه‌ای به‌دست آید که نتوان از آن صرف‌نظر کرد. اگر $a = \frac{1}{10^{10}}$ و $b = \frac{1}{10^{12}}$، آن‌وقت

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{10^{10}} : \frac{1}{10^{12}} = 10^2 = 100$$

و روشن است که عدد ۱۰۰ قابل صرف‌نظر کردن نیست.

۲. مقایسه بی‌نهایت کوچک‌ها. اگر داشته باشیم $x = 0/01$، آن‌وقت $x^2 = 0/0001$. x عدد کوچکی است، ولی x^2 خیلی کوچکتر از آن است. اگر ε را بی‌نهایت کوچک (در اصطلاح ریاضی: بی‌نهایت کوچک مرتبهٔ اول) فرض کنیم، ε^2 بی‌نهایت کوچک مرتبهٔ دوم، ε^3 بی‌نهایت کوچک مرتبهٔ سوم و ... و ε^n بی‌نهایت کوچک مرتبهٔ nام است و، در شرایط معمولی، در برابر هر بی‌نهایت کوچک، از بی‌نهایت کوچک‌های مرتبه بالاتر می‌توان صرف‌نظر کرد.

وقتی می‌گویید، فاصلهٔ بین دو شهر ۱۰۰۰ کیلومتر است، چه‌بسا از ۱۰۰ تا حتا ۱۰۰۰ متر آن صرف‌نظر کرده‌اند، زیرا ۱۰۰ متر $\frac{1}{10000}$ فاصلهٔ دو شهر و ۱۰۰۰ متر $\frac{1}{1000}$ آن است و در محاسبه‌های تقریبی می‌توان از آن‌ها صرف‌نظر کرد. ولی اگر بخواهید طول یک خیابان را اندازه بگیرید، دیگر از ۱۰۰ متر و ۱۰۰۰ متر نمی‌توان گذشت. عددها در مقایسهٔ با یکدیگر، وضع خود را روشن می‌کنند که کدام‌یک را نسبت به دیگران، می‌توان کوچک و قابل گذشت دانست.

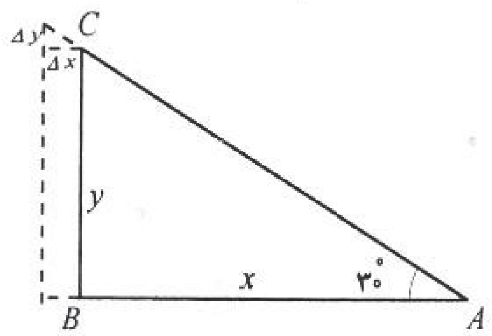
و وقتی در ریاضیات با متغیری مثل x سروکار داشته باشیم، مقدار بسیار کوچک آن را با Δx نشان می‌دهند. Δx، یعنی بخش بسیار کوچکی از x. گاه لازم می‌شود، متغیر x را، به‌اندازهٔ بسیار کوچکی زیاد کنیم، یعنی

به‌صورت $x+\Delta x$ درآوریم. در این‌صورت گویند: به x نموی به‌اندازهٔ Δx داده‌ایم: Δx نمو x است.

مثال ۱. مثلث راست گوشهٔ ABC را در نظر می‌گیریم، به‌نحوی که

$$\widehat{A}=۳۰^\circ,\quad \widehat{B}=۹۰,\quad |AB|=x,\quad |BC|=y$$

اگر قاعدهٔ AB را اندکی بزرگتر کنیم و به‌اندازهٔ Δx نمو دهیم (شکل ۱۲)، به‌شرطی که زاویهٔ A تغییر نکند و همان ۳۰ درجه باقی بماند، ضلع BC هم نموی به‌اندازهٔ Δy پیدا می‌کند.



شکل ۱۲

روشن است که در این‌جا Δy با Δx برابر نیست (و در بیشتر حالت‌ها، همین‌طور است)، ولی بین Δy و Δx رابطه‌ای وجود دارد (زیرا y و x به‌هم مربوط بودند). اگر مثلث کوچکی را که در راس C تشکیل شده است، در نظر بگیریم، به‌روشنی به‌دست می‌آید:

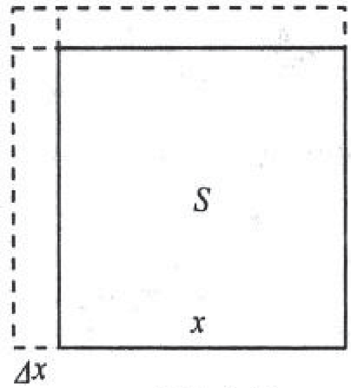
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\tan ۳۰^\circ=\frac{۱}{۳}\sqrt{۳}$$

هرچه Δx را کوچکتر بگیریم، این نسبت به‌هم نمی‌خورد و همیشه برقرار است.

مثال ۲. مربعی به ضلع برابر x در نظر می‌گیریم و مساحت آن را S می‌نامیم. اگر ضلع مربع را به‌اندازهٔ Δx نمو دهیم، مساحت آن تغییر می‌کند

و به‌اندازهٔ ΔS نمو می‌کند (شکل ۱۳):

$$S = x^{۲}, \quad S + \Delta S = (x + \Delta x)^{۲}$$



شکل ۱۳

به‌سادگی می‌توان ΔS را محاسبه کرد:

$$\Delta S = ۲x \cdot \Delta x + (\Delta x)^{۲} \qquad (۱)$$

در برابری (۱)، جملهٔ $(\Delta x)^{۲}$، به‌شرطی که Δx خیلی کوچک باشد، نسبت به جملهٔ $۲x \cdot \Delta x$، بی‌نهایت کوچکی از مرتبهٔ دوم و قابل حذف است. ولی اگر نسبت $\frac{\Delta S}{\Delta x}$ را پیدا کنیم، مطلب روشن‌تر می‌شود:

$$\frac{\Delta S}{\Delta x} = ۲x + \Delta x$$

می‌بینیم که از Δx (که در مقایسه با $۲x$ خیلی کوچک است) می‌توان صرف‌نظر کرد. در واقع

$$\underset{\Delta x \to ۰}{\text{حد}} \left(\frac{\Delta s}{\Delta x}\right) = ۲x$$

اشتباه نکنید: Δx یعنی مقدار کوچکی از x، یعنی نموی برای x. Δx به‌معنای Δ ضرب در x نیست، Δ را از x نمی‌توان جدا کرد.

۳. چرا به‌نسبت بی‌نهایت کوچک‌ها نیاز داریم؟ با اتومبیل از نقطهٔ A به نقطهٔ B، که ۱۲ کیلومتر باهم فاصله دارند، می‌روید. بعد از نیم ساعت (۳۰ دقیقه) به مقصد می‌رسید، یعنی میانگین سرعت اتومبیل شما برابر

$$\frac{۱۲۰۰۰}{۳۰} = ۴۰۰ \text{ (متر در دقیقه)}$$

یا ۲۴ کیلومتر در ساعت است. آیا به‌واقع در تمامی مسیر، سرعت اتومبیل شما برابر ۲۴ کیلومتر در ساعت بوده‌است؟ اگر ضمن راه، گاه‌به‌گاه به سرعت‌سنج اتومبیل توجه می‌کردید، متوجه می‌شدید که، به‌تقریب در هر لحظه، سرعت اتومبیل شما با سرعت ۲۴ کیلومتر در ساعت فرق می‌کرد. ۲۴ کیلومتر در ساعت، میانگین سرعت اتومبیل در تمام راه است و با سرعت آن در لحظه‌های مختلف متفاوت است. بسیار پیش می‌آید که نیاز پیدا می‌کنیم، سرعت متحرکی را در لحظهٔ خاصی در اختیار داشته‌باشیم. برای این منظور، فاصلهٔ زمانی بسیار کوچکی را، که به لحظهٔ زمانی مورد نظر ما نزدیک باشد، در نظر می‌گیرند و فاصله‌ای را که متحرک در این زمان بسیار کوچک پیموده است، محاسبه می‌کنند؛ در این صورت میانگین سرعت در این فاصلهٔ زمانیِ بسیار کوچک، به سرعت لحظه‌ای که به آن نیازمندیم، خیلی نزدیک خواهد بود.

به زبان ریاضی، اگر زمان را متغیر و فاصله‌ای را که پیموده شده‌است تابع بنامیم، باید به متغیر نموی داد، درنتیجه نموی برای تابع به‌دست می‌آید، نسبت نمو تابع به نمو متغیر را (به‌شرطی کهِ نمو متغیر را خیلی کوچک بگیریم، یعنی به‌سمت صفر میل دهیم) حساب می‌کنیم، حد این نسبت مقدار سرعت را در لحظهٔ مورد نظر به ما می‌دهد. به مثالی توجه کنید.

مثال ۳. سنگی که از بلندی رها شود، باتوجه به کشش زمین، به‌طرف پایین می‌آید. اگر t را نمایندهٔ زمان (برحسب ثانیه) و d را نمایندهٔ فاصله‌ای که سنگ، از لحظهٔ رها شدن پیموده است، فرض کنیم، بین t و d رابطه‌ای

وجود دارد که به‌تقریب چنین است:

$$d = ۵t^{۲}$$

شما جلو یکی از پنجره‌های طبقه‌های پایین برجی ایستاده‌اید. سنگی که از بالای برج رها کرده‌اند، درست بعد از ۳ ثانیه از جلو چشم شما می‌گذرد و به‌طرف پایین می‌رود. می‌خواهیم سرعت سنگ را در لحظه‌ای که ازجلو پنجرهٔ شما گذشته است، پیدا کنیم.

حل. باید، زمان بسیار کوچکی (Δt) بعد از ۳ ثانیه اول در نظر بگیریم و ببینیم در این فاصلهٔ زمانی کوتاه، سنگ چه مسافتی را پیموده است (Δd). از نسبت $\frac{\Delta d}{\Delta t}$، سرعت میانگین سنگ در این زمان بسیار کوچک به‌دست می‌آید و روشن است، هرچه Δt را کوچکتر بگیریم، این سرعت میانگین، به‌سرعت سنگ در لحظه‌ای که از جلو پنجره گذشته است، نزدیکتر می‌شود. بنابراین، برای این‌که سرعت سنگ را در همان لحظهٔ لازم به‌دست آوریم، باید حد نسبت $\frac{\Delta d}{\Delta t}$ را وقتی $\Delta t \to ۰$ پیدا کنیم. به محاسبه می‌پردازیم: سنگ بعد از ۳ ثانیه به‌اندازهٔ

$$d = ۵ \times ۳^{۲} = ۴۵ \text{ (متر)}$$

پیموده است: ببینیم مسافتی که سنگ بعد از ($۳ + \Delta t$) ثانیه پیموده، چقدر است:

$$d + \Delta d = ۵(۳ + \Delta t)^{۲} = ۴۵ + ۳۰\Delta t + ۵(\Delta t)^{۲}$$

بنابراین، در فاصلهٔ زمانی Δt، سنگ به‌اندازهٔ

$$\Delta d = ۳۰\Delta t + (\Delta t)^{۲} \text{ (متر)}$$

پیموده است. برای پیدا کردن سرعت میانگین در فاصلهٔ زمانی Δt، باید نسبت $\frac{\Delta d}{\Delta t}$ را محاسبه کنیم:

$$\frac{\Delta d}{\Delta t} = ۳۰ + \Delta t$$

و برای پیدا کردن سرعت سنگ، در لحظهٔ ۳ ثانیه، باید حد این نسبت را، وقتی $\Delta t \to ۰$، به‌دست آوریم:

$$\underset{\Delta t \to ۰}{\text{حد}} \frac{\Delta d}{\Delta t} = \underset{\Delta t \to ۰}{\text{حد}} (۳۰ + \Delta t) = ۳۰ \ (\text{متر در ثانیه})$$

سنگ، ۳ ثانیه بعد از رها شدن، یعنی در لحظه‌ای که از جلو چشم شما گذشته است، ثانیه‌ای ۳۰ متر سرعت داشته است.

ایساک نیوتون دانشمند انگلیسی که در سال‌های بین ۱۶۴۳ تا ۱۷۲۷ میلادی زندگی می‌کرد، با تکیه بر همین روش، به محاسبهٔ سرعت‌های لحظه‌ای (از آن‌جمله، سرعت‌های سیاره‌ها و ستارگان) پرداخت.

§۲. مشتق

۱. **ورود به مطلب.** در ریاضیات، به سرعت و یا پدیده‌های دیگری که موجب پیدایش مسیر تازه‌ای در محاسبه شد، کار ندارند و مساله را، به‌صورتی کلی و با زبان ریاضی مطرح می‌کنند.

در مثال ۳ دیدیم، مسافتی را که سنگ ضمن سقوط خود می‌پیماید، می‌توان با برابری تقریبی $d = ۵t^{۲}$ پیدا کرد. قانون سقوط آزاد جسم را، گالیله (۱۵۶۴_۱۶۴۲ میلادی) پیدا کرد و رابطهٔ دقیق آن چنین است:

$$d = \frac{۱}{۲} g t^{۲}$$

که در آن g عددی ثابت و مربوط به میزان کشش زمین در هر نقطه و به‌تقریب برابر ۹/۸ است. اگر زاویهٔ حادهٔ مثلث راست گوشه‌ای را α و ضلع مجاور به این زاویه (و مجاور زاویهٔ قائمه) را x بگیریم، می‌توان مساحت مثلث را با برابری

$$S = \frac{۱}{۲} \tan \alpha \cdot x^{۲}$$

بیان کرد که در آن، $\tan \alpha$ مقدار ثابتی است که به نوع مثلث بستگی دارد. وقتی یک جسم در حال حرکت است، دارای انرژی است و انرژی آن با برابری

$$E = \frac{۱}{۲} m v^{۲}$$

معین می‌شود که در آن، m مقداری ثابت است (جرم جسم) و v سرعت آن. مقدار حرارتی که، ضمن عبور برق تولید می‌شود، از رابطهٔ

$$G = \frac{۱}{۲} R t^{۲}$$

به‌دست می‌آید، که در آن R مقاومت سیم و مقداری ثابت و t معرف زمانی است که جریان برق عبور کرده است.

این‌ها رابطه‌هایی است مربوط به مکانیک، هندسه و فیزیک. ولی در ریاضیات، یک دستور را در نظر می‌گیرند:

$$y = \frac{۱}{۲} a x^{۲}$$

که در آن، a مقداری ثابت، x متغیر مستقل و y متغیر تابع است. هر نتیجه‌ای که در ریاضیات دربارهٔ دستور اخیر، یعنی $y = \frac{۱}{۲} a x^{۲}$ به‌دست آوریم، می‌تواند در همهٔ حالت‌های کاربردی پیشین مورد استفاده قرار گیرد.

کار ریاضیات، طرح تعریف‌های کلی و نتیجه‌گیری‌های کلی است، بدون این‌که به حالت‌های کاربردی آن‌ها نظر داشته باشد. ولی در عمل، همهٔ این تعریف‌ها و نتیجه‌گیری‌ها در زمینه‌های مختلف و دانش‌های مختلف، کاربرد خود را پیدا می‌کنند.

۲. تعریف مشتق. تابع $y = f(x)$ را، که در بازهٔ (a, b) معین است، در نظر می‌گیریم. نقطهٔ دلخواه $x \in (a, b)$ را انتخاب می‌کنیم و در این نقطه نمو Δx را طوری در نظر می‌گیریم که $x + \Delta x$ در بازهٔ (a, b) واقع باشد. به‌این ترتیب، برای y هم نمو

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

به‌دست می‌آید. نسبت $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ را تشکیل می‌دهیم.

اگر برای نسبت $\frac{\Delta y}{\Delta x}$، وقتی $\Delta x \to ۰(\Delta x \neq ۰)$، حدی وجود داشته باشد، این حد را مشتق $f(x)$ در نقطهٔ x گویند و به‌صورت y'_x یا $f'(x)$ نشان می‌دهند (y'_x را بخوانید: مشتق y نسبت به x؛ اغلب اندیس x را نمی‌نویسند، ولی اگر مشتق نسبت به متغیری غیر از x باشد، باید اندیس آن نوشته شود تا معلوم باشد مشتق نسبت به چه متغیری است). بنابراین

$$y' = \underset{\Delta x \to ۰}{\text{حد}} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (\Delta x \neq ۰) \qquad (۱)$$

یا

$$f'(x) = \underset{\Delta x \to ۰}{\text{حد}} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (\Delta x \neq ۰)$$

اگر همهٔ مقدارهای x از بازهٔ (a, b) را، که در آن‌ها $f'(x)$ وجود دارد، در نظر بگیریم، می‌بینیم که هر نقطهٔ x متناظر است با مقدار معینی از $f'(x)$. بنابراین $f'(x)$، تابعی از متغیر x است که از روی تابع $f(x)$ و به‌یاری

دستور (۱) به‌دست می‌آید. برای محاسبهٔ مشتق، همیشه به‌حالت مبهم $\frac{۰}{۰}$ برخورد می‌کنیم.

پیدا کردن مشتق یک تابع را، **مشتق‌گیری** گویند.

یادداشت. y'_x را به‌صورت $\frac{dy}{dx}$ هم نشان می‌دهند. در این صورت، dx را دیفرانسیل x و dy را دیفرانسیل y گویند و داریم:

$$dy = y'dx$$

مثال ۴. مشتق تابع $y = x^۲$ را در نقطهٔ $x = \frac{۱}{۲}$ به‌دست آورید.

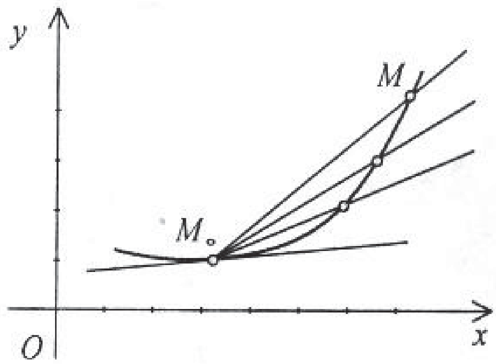
حل. بنابر تعریف مشتق داریم:

$$y'_x = \underset{\Delta x \to ۰}{\text{حد}} \frac{(x + \Delta x)^۲ - x^۲}{\Delta x} = \underset{\Delta x \to ۰}{\text{حد}} \frac{۲x \cdot \Delta x + (\Delta x)^۲}{\Delta x} =$$
$$= \underset{\Delta x \to ۰}{\text{حد}} (۲x + \Delta x) = ۲x$$

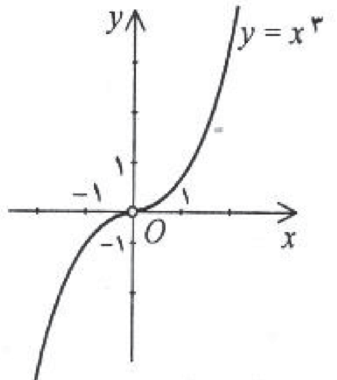
به‌این ترتیب به‌دست آمد: $y' = ۲x$. به‌کمک این نتیجه، می‌توان مقدار مشتق را در هر نقطه‌ای پیدا کرد. درضمن به‌ازای $x = \frac{۱}{۲}$ به‌دست می‌آید: $y' = ۱$.

به‌زودی خواهیم دید که مفهوم مشتق، این امکان را به‌ما می‌دهد که رفتار تابع را بررسی کنیم. در واقع، مشتق ابزاری است برای بررسی تابع.

۳. تعبیر هندسی مشتق. مفهوم مماس بر یک منحنی را به‌یاد می‌آوریم. $M_۰$ را نقطه‌ای از یک منحنی پیوسته (نمودار یک تابع پیوسته) فرض کنید. از نقطهٔ $M_۰$، خط راست $M_۰M$ را طوری رسم می‌کنیم که منحنی را در نقطهٔ دیگر M قطع کند (شکل ۱۴). اگر نقطهٔ M را در طول منحنی، به $M_۰$ نزدیک کنیم، آن‌وقت خط راست $M_۰M$ دور $M_۰$ می‌چرخد و در حد خود (یعنی وقتی M به $M_۰$ برسد)، به مماس در نقطهٔ $M_۰$ تبدیل می‌شود:



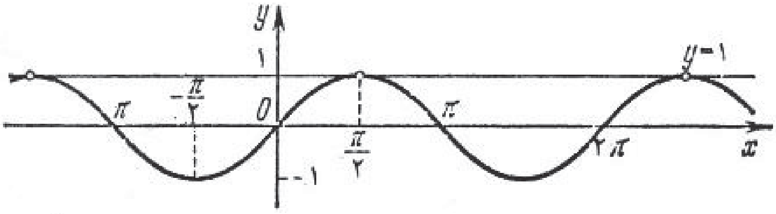
شکل ۱۴



شکل ۱۵

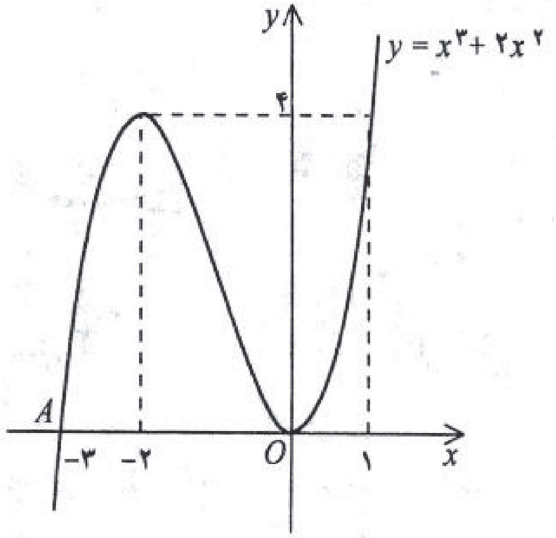
مماس بر منحنی در نقطهٔ $M_۰$، به خط راستی گفته می‌شود که در حالت حدی قاطع $M_۰M$ باشد، وقتی که نقطهٔ M روی منحنی به‌سمت $M_۰$ حرکت کند.

توجه داشته باشید که با این تعریف: الف) ممکن است خط راست مماس، در نقطهٔ تماس از منحنی عبور کند، مثل محور $x'x$ که مماس بر منحنی $y = x^۳$ در مبداء مختصات است (شکل ۱۵)؛ ب) مماس ممکن است نقطه‌های مشترک دیگری هم با منحنی داشته باشد مثل خط راست $y = ۱$ که بر نمودار تابع $y = \sin x$ در بی‌نهایت نقطه مماس است (شکل ۱۶).



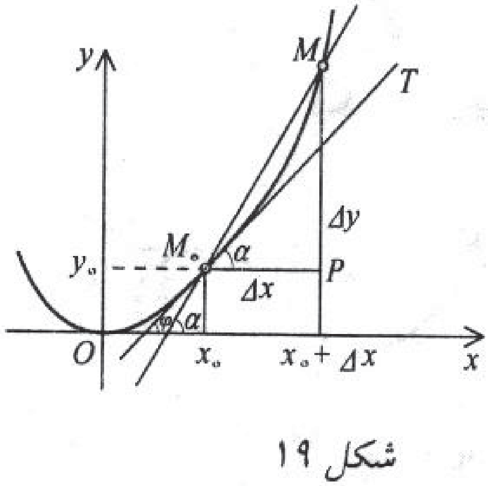
شکل ۱۶

و یا محور $x'x$ که در مبداء مختصات بر نمودار تابع $y = x^{3} + 3x^{2}$ مماس و در نقطهٔ $A(-3, 0)$ آن را قطع کرده است (شکل ۱۷)؛

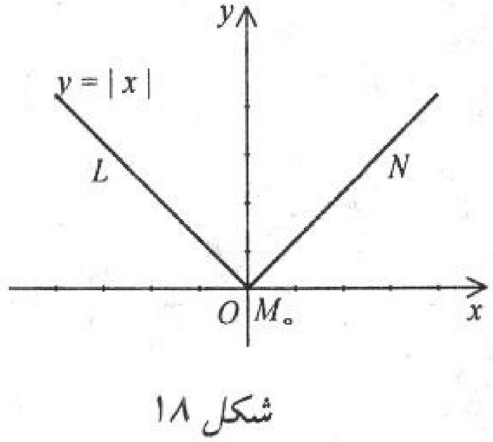


شکل ۱۷

ج) مماس ممکن است وجود نداشته باشد، مثل نقطهٔ M_0 در روی نمودار $y = |x|$ (شکل ۱۸). در واقع روی این نمودار، اگر نقطهٔ M از سمت چپ به M_0 نزدیک شود، خط راست LM_0 به‌دست می‌آید و اگر از سمت راست M_0 به آن نزدیک شود، در حد خط راست NM_0 را به ما می‌دهد.



شکل ۱۹



شکل ۱۸

این تعریف مماس را، برای نقطهٔ $M_\circ(x_\circ, y_\circ)$ واقع بر نمودار تابع $y = f(x)$ به‌کار می‌بریم (شکل ۱۹ را ببینید). روی نمودار، نقطهٔ دیگری مثل $M(x_\circ + \Delta x, y_\circ + \Delta y)$ را در نظر می‌گیریم و قاطع $M_\circ M$ را رسم می‌کنیم. α را زاویه‌ای می‌گیریم که خط راست $M_\circ M$ با جهت مثبت محور $x'x$ می‌سازد. در این صورت وقتی $M \to M_\circ$ یا به‌زبان دیگر $\Delta x \to \circ$، آن‌وقت $\Delta y \to \circ$ و روشن است که

$$\underset{\Delta x \to \circ}{\text{حد}} \alpha = \varphi \qquad (۲)$$

که در آن، φ زاویه‌ای است که مماس $M_\circ T$ با Ox می‌سازد. همچنین

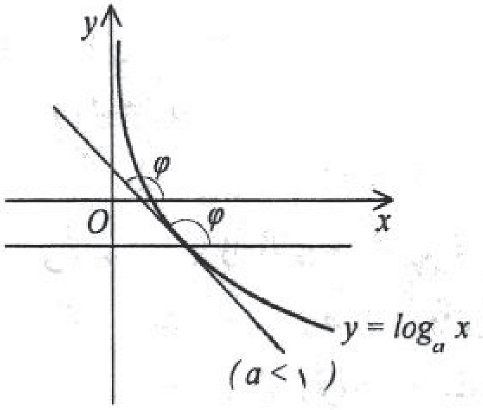
$$\underset{\Delta x \to \circ}{\text{حد}} \tan\alpha = \tan(\underset{\Delta x \to \circ}{\text{حد}} \alpha) = \tan\varphi \qquad (۳)$$

در شکل ۱۹ می‌توان دید که $\tan\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ (که در آن، Δx و Δy می‌توانند مثبت یا منفی باشند)، در این صورت، رابطهٔ (۳) را می‌توان این‌طور نوشت:

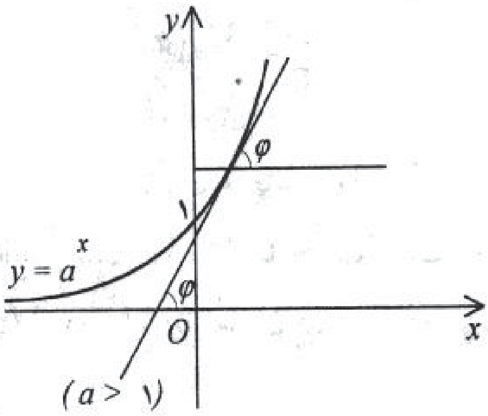
$$\tan\varphi = \underset{\Delta x \to \circ}{\text{حد}} \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad (۴)$$

یعنی، مشتق تابع $y = f(x)$ در نقطهٔ $M_\circ(x_\circ, y_\circ)$، برابر است با تانژانت زاویه‌ای که مماس در این نقطه با محور Ox می‌سازد، به‌زبان دیگر، مشتق تابع $y = f(x)$ در نقطهٔ $M_\circ$، برابر است با ضریب زاویهٔ مماس در این نقطه.

روشن است که علامت ضریب زاویهٔ مماس بر نمودار تابع، به صعودی یا نزولی بودن تابع بستگی دارد. در شکل ۲۰، نمودار تابعی صعودی داده شده است. در این حالت $\tan\alpha > \circ$ و بنابراین $y' > \circ$. در شکل ۱۵، با نمودار تابعی صعودی سروکار داریم که در آن $f'(\circ) = \circ$. سرانجام، در شکل ۲۱، نمودار تابعی نزولی داده شده است که در آن $y' < \circ$.



شکل ۲۱



شکل ۲۰

به‌این‌ترتیب، **شرط لازم** برای تابع صعودی یا تابع نزولی به‌دست می‌آید:

اگر تابعی در یک بازه صعودی باشد، مشتق آن در این بازه نامنفی است. همچنین، اگر تابع در بازه‌ای نزولی باشد، مشتق آن در این بازه نامثبت است.

در واقع، در تعریف تابع صعودی دیده‌ایم که، اگر به x مقداری مثبت اضافه کنیم، به y هم مقداری مثبت اضافه می‌شود و اگر به x مقداری منفی اضافه کنیم، به y هم مقداری منفی اضافه می‌شود، یعنی باید Δx و Δy هم‌علامت باشند که درنتیجه

$$y' = \underset{\Delta x \to \circ}{\text{حد}} \frac{\Delta y}{\Delta x} \geq \circ$$

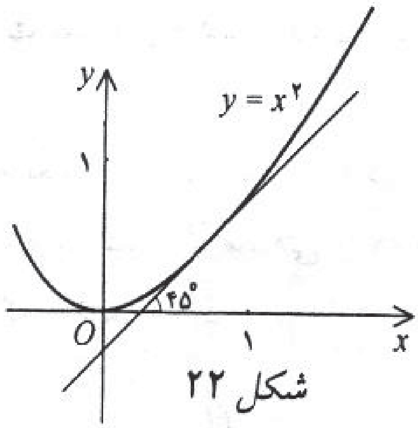
به‌همین ترتیب، برای تابع نزولی، Δx و Δy، علامت‌هایی مخالف هم دارند و درنتیجه

$$y' = \underset{\Delta x \to \circ}{\text{حد}} \frac{\Delta y}{\Delta x} \leq \circ$$

مثال ۵. مطلوب است معادلهٔ خط راست مماس بر نمودار تابع $y = x^{۲}$ در نقطهٔ به‌طول $x = \frac{۱}{۲}$.

حل. در مثال ۴ دیدیم که مشتق $y = x^{۲}$ در نقطهٔ $x = \frac{۱}{۲}$ برابر است با ۱. بنابراین مماس بر نمودار تابع در این نقطه، ضریب زاویه‌ای برابر ۱ دارد

(این مماس با محور Ox، زاویه‌ای برابر ۴۵ درجه می‌سازد: شکل ۲۲).



شکل ۲۲

درضمن نقطهٔ به طول $\frac{1}{2}$، که بر نمودار باشد، عرضی برابر $\frac{1}{4}$ دارد. یک نقطه و ضریب زاویهٔ خط راست مماس معلوم است. معادلهٔ آن به‌سادگی به‌دست می‌آید:

$$\frac{y-\frac{1}{4}}{x-\frac{1}{2}}=1 \Rightarrow 4x-4y-1=0$$

مثال ۶. مماسی بر نمودار تابع $y=x^2$ رسم کرده‌ایم که بر خط راست $x-2y=0$ عمود شده است. مختصات نقطهٔ تماس را پیدا کنید.

حل. خط راست عمود بر $x-2y=0$، ضریب زاویه‌ای برابر ۲− دارد (چرا؟). بنابراین مشتق تابع در نقطهٔ تماس (یعنی مشتق تابع به‌ازای طول نقطهٔ تماس) باید برابر ۲− باشد. باتوجه به مثال ۴، مشتق $y=x^2$ به‌صورت $y'=2x$ درمی‌آید و داریم:

$$2x=-2 \Rightarrow x=-1 \text{ (طول نقطهٔ تماس)}$$

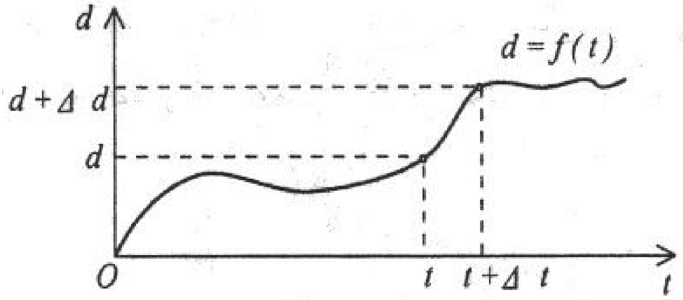
با در دست داشتن طول نقطه‌ای از نمودار، می‌توان عرض آن را به‌دست آورد.

پاسخ. نقطهٔ تماس: $T(-1, 1)$.

۴. تغییر مشتق در مکانیک. پیش از این، در مثال ۳، راه‌حل مساله‌ای را برای پیدا کردن سرعت لحظه‌ای دیدیم. اکنون مطلب را دقیق‌تر و در حالت کلی بررسی می‌کنیم.

مسالهٔ مربوط به تعیین سرعت نقطه‌ای را در نظر می‌گیریم که در طول یک خط راست حرکت می‌کند. اگر مسافتی را که نقطه می‌پیماید با d نشان دهیم، روشن است که d تابعی است از زمان t

$$d = f(t)$$



شکل ۲۳

فرض کنیم، نقطهٔ مفروض در لحظهٔ t در وضع d باشد (شکل ۲۳). بعد از زمان کوچکی مثل Δt، نقطه در وضع $d + \Delta d$ قرار می‌گیرد که در آن، Δd فاصله‌ای است که نقطه در زمان Δt می‌پیماید. نسبت $\dfrac{\Delta d}{\Delta t}$ **سرعت میانگین** نقطه را در فاصلهٔ زمانی Δt بیان می‌کند و حد این نسبت، وقتی $\Delta t \to 0$، معرف **سرعت لحظه‌ای** نقطه، در لحظهٔ زمانی t است. ولی بنابر تعریف مشتق

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta d}{\Delta t} = d'_t$$

بنابراین، از دیدگاه مکانیک، مشتق فاصله نسبت به زمان، در نقطه‌ای از مسیر، سرعت لحظه‌ای را در این نقطه بیان می‌کند.

۵. وجود مشتق و پیوستگی تابع. پیش از این، مفهوم تابع پیوسته را

دیده‌ایم. وجود مشتق، به ما امکان می‌دهد، ویژگی‌های تازه‌ای از تابع را پیدا کنیم که به پیوستگی تابع مربوط می‌شود. ببینیم چه رابطه‌ای بین مشتق‌پذیر بودن تابع در یک نقطه با پیوستگی آن در این نقطه وجود دارد؟

پیش از همه یادآور می‌شویم که، هر تابع پیوسته‌ای، مشتق‌پذیر نیست. برای نمونه، تابع با ضابطهٔ $y = |x|$ را در نظر بگیرید. این تابع در نقطهٔ $x = ۰$ پیوسته است، ولی در این نقطه مشتق ندارد، زیرا نمودار تابع در نقطهٔ $x = ۰$، دارای مماس نیست (شکل ۱۸ را ببینید). ولی این قضیه درست است:

قضیه. اگر تابع $y = f(x)$ در نقطهٔ x دارای مشتق باشد (به‌شرطی که مشتق به‌سمت بی‌نهایت میل نکند)، آن‌وقت $f(x)$ در این نقطه پیوسته است.

* **اثبات.** بنابر شرط قضیه داریم:

$$y' = \underset{\Delta x \to ۰}{\text{حد}} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

بنابر تعریف حد، باید داشته باشیم:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \alpha \Rightarrow \Delta y = y'\Delta x + \alpha \Delta x$$

که در آن α مقدار بی‌نهایت کوچکی است که بستگی به Δx دارد و وقتی $\Delta x \to ۰$، α هم به‌سمت صفر میل می‌کند. یعنی $\alpha\Delta x$، بی‌نهایت کوچکی، با مرتبهٔ بالاتر، نسبت به بی‌نهایت کوچک Δx است. از این‌جا روشن می‌شود، وقتی Δx به سمت صفر میل کند، Δy هم به سمت صفر میل می‌کند و، بنابراین، $y = f(x)$ در نقطهٔ x پیوسته است.

۶. قانون‌های مشتق‌گیری. قانون‌های مشتق‌گیری را برای تابع‌های مقدماتی می‌آوریم.

۱) مشتق مقدار ثابت. تابع ثابت $y = c$ را در نظر می‌گیریم که در آن، c عددی ثابت است. اگر تابع را به‌صورت $y = 0x + c$ بنویسیم، داریم:

$$y + \Delta y = 0(x + \Delta x) + c \Rightarrow \Delta y = 0\Delta x$$

از آن‌جا: $y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$. این نتیجه را به‌یاری نمودار هم می‌توان به‌دست آورد. $y = c$ معرف خط راستی موازی $x'x$ است. مماس در هر نقطهٔ این خط راست بر خود $y = c$ منطبق است و خط راست موازی $x'x$، زاویه‌ای برابر صفر با Ox می‌سازد و $\tan 0 = 0$؛ یعنی $y' = 0$.

۲) مشتق تابع $y = x^m$ $(m \in \mathbf{N})$. داریم:

$$\Delta y = (x + \Delta x)^m - x^m = (x^m + mx^{m-1} \cdot \Delta x +$$
$$+\frac{m(m-1)}{2}x^{m-2} \cdot \Delta x^2 + \ldots + \Delta x^m) - x^m =$$
$$= \Delta x \left[mx^{m-1} + \frac{m(m-1)}{2}x^{m-2} \cdot \Delta x + \ldots + \Delta x^{m-1}\right]$$

و بنابراین

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} =$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \left[mx^{m-1} + \frac{m(m-1)}{2}x^{m-2} \cdot \Delta x + \ldots + \Delta x^{m-1}\right] = mx^{m-1}$$

اگر m عددی طبیعی باشد، برای $y = x^m$ داریم $y' = mx^{m-1}$. ولی با استدلالی ظریف‌تر (و البته دشوارتر) می‌توان ثابت کرد که، برای هر عدد حقیقی m این نتیجه‌گیری درست است و ما در این‌جا، آن را بدون اثبات می‌پذیریم.

مثال ۷. مشتق این تابع‌ها را به‌دست آورید:

$$1)\ y = x^{10}; \quad 2)\ y = \frac{1}{x^3}; \quad y = \sqrt[3]{x^2}$$

حل. به‌ترتیب داریم:

$$۱)\ y = x^{۱۰} \Rightarrow y' = ۱۰x^{۹};$$

$$۲)\ y = \frac{۱}{x^{۳}} = x^{-۳} \Rightarrow y' = -۳x^{-۴} = -\frac{۳}{x^{۴}};$$

$$۳)\ y = \sqrt[۳]{x^{۲}} = x^{\frac{۲}{۳}} \Rightarrow y' = \left(\frac{۲}{۳} - ۱\right) x^{\frac{۲}{۳}-۱} = -\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x}}$$

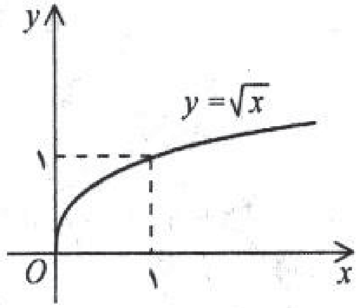
مثال ۸. مشتق تابع‌های ۱) $y = x^{۳}$، ۲) $y = \sqrt{x}$ را به‌دست آورید. این تابع‌ها در چه بازه‌ای صعودی‌اند؛ مماس بر نمودار این تابع‌ها در مبداء مختصات چه وضعی دارد؟

حل. ۱) داریم: $y' = ۳x^{۲}$. مقدار مشتق برای همهٔ عددهای حقیقی، به‌جز $x = ۰$، مثبت و بنابراین تابع $y = x^{۳}$ تابعی صعودی است. چون برای $x = ۰$ داریم $y' = ۰$، بنابراین ضریب زاویه مماس بر منحنی در مبداء مختصات برابر صفر و خود مماس بر محور $x'x$ منطبق است؛

۲) $y' = \frac{۱}{۲\sqrt{x}}$. به‌این ترتیب $(\sqrt{x})' > ۰$، یعنی $y = \sqrt{x}$ تابعی صعودی است. تابع $y = \sqrt{x}$ در بازهٔ $[۰, \infty)$ معین است، بنابراین برای $x = ۰$، تنها دربارهٔ مشتق راست در این نقطه می‌توان صحبت کرد و

$$\lim_{x \to ۰+} \frac{۱}{۲\sqrt{x}} = +\infty$$

محور Oy در مبداء مختصات (نقطهٔ آغاز نمودار)، بر نمودار $y = \sqrt{x}$ مماس است (شکل ۲۴).



شکل ۲۴

۳) مشتق مجموع، تفاضل، حاصل‌ضرب و خارج‌قسمت دو تابع. $u(x)$ و $v(x)$ را دو تابع مشتق‌پذیر (و بنابراین پیوسته) فرض می‌کنیم. وقتی x به‌اندازهٔ Δx نمو کند، نمو Δu برای u و نمو Δv برای v به‌دست می‌آید و البته

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=u' \quad \text{و} \quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}=v'$$

الف) برای $y=u\pm v$ داریم:

$$\Delta y=[(u+\Delta u)\pm(v+\Delta v)]-(u\pm v)=\Delta u\pm\Delta v$$

دو طرف برابری را بر Δx تقسیم می‌کنیم و به‌سمت حد می‌رویم:

$$\lim_{\Delta x\to\infty}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\pm\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)$$

و یا $(u\pm v)'=u'\pm v'$.

برای نمونه برای $y=x^5-x^2$ داریم $y'=5x^4-2x$.

ب) $y=u(x)\cdot v(x)$. به‌دست می‌آید:

$$\Delta y=(u+\Delta u)(v+\Delta v)-uv=v\cdot\Delta u+u\cdot\Delta v+\Delta u\cdot\Delta v$$

که از آن‌جا نتیجه می‌شود:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=v\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+u\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u\cdot\Delta v}{\Delta x}$$

$\Delta u \Delta v$، نسبت به Δx بی‌نهایت کوچکی از مرتبهٔ بالاتر است و بنابراین

$$\underset{\Delta x \to ۰}{\text{حد}} \frac{\Delta u \cdot \Delta v}{\Delta x} = ۰$$

درنتیجه خواهیم داشت: $(u \cdot v)' = u' \cdot v + v'u$.

به‌عنوان نتیجه‌ای از این قانون، با فرض ثابت بودن a، داریم:

$$(au)' = a'u + u'a = au'$$

یعنی ضریب ثابت تابع را، می‌توان در مشتق تابع ضرب کرد.

مثال ۹. مطلوب است مشتق $y = (x^۲ + ۱)\sqrt{x}$.

حل. داریم:

$$[(x^۲ + ۱)\sqrt{x}]' = (x^۲ + ۱)'\sqrt{x} + (x^۲ + ۱)(\sqrt{x})' =$$
$$= ۲x\sqrt{x} + (x^۲ + ۱) \cdot \frac{۱}{۲\sqrt{x}} = \frac{۵x^۲ + ۱}{۲\sqrt{x}}$$

ج) اکنون به قانون مشتق‌گیری از کسر می‌پردازیم: با فرض $y = \frac{u(x)}{v(x)}$، به‌دست می‌آید $(v(x) \neq ۰)$:

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{v \cdot \Delta u - u \cdot \Delta v}{v(v + \Delta v)}$$

و یا، پس از تقسیم دو طرف بر Δx و بافرض $\Delta x \to ۰$:

$$\underset{Ax \to ۰}{\text{حد}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v \cdot \underset{\Delta x \to ۰}{\text{حد}} \frac{Au}{Ax} - v \underset{\Delta x \to ۰}{\text{حد}} \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v^۲}$$

و از آن‌جا $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^۲}$.

مثال ۱۰. مطلوب است مشتق تابع $y = \frac{2x+1}{x^3}$.

حل. بنابر قانون مشتق‌گیری از کسر داریم:

$$y' = \frac{(2x+1)' \cdot x^3 - (2x+1)(x^3)'}{(x^3)^2} =$$

$$= \frac{2x^3 - (2x+1)\cdot 3x^2}{x^6} = -\frac{4x+3}{x^4}$$

۴) مشتق تابع مرکب. تابع $y = f(\varphi(x))$ را در نظر می‌گیریم. اگر فرض کنیم $u = \varphi(x)$، تابع را می‌توان این‌طور نوشت:

$$y = f(u),\ u = \varphi(x)$$

این برابری روشن است:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

و بنابراین

$$y'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \times \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = y'_u \cdot u'_x$$

مثال ۱۱. مطلوب است محاسبهٔ مشتق $y = (x + \sqrt{x})^7$.

حل. اگر $u = x + \sqrt{x}$ بگیریم، به‌دست می‌آید:

$$y = u^7,\ u = x + \sqrt{x}$$

بنابراین

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x = 7u^6 \times \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = 7(x+\sqrt{x})^6 \cdot \frac{2\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}}$$

یادداشت. یادآوری می‌کنیم که درعمل، نیازی به انتخاب تابع کمکی u نیست و می‌توان به‌طور مستقیم مشتق را محاسبه کرد. به‌عنوان نمونه برای تابع $y = (x^۲ + ۳x + ۴)^۲$ داریم:

$$y' = ۲(x^۲ + ۳x + ۴)(x^۲ + ۳x + ۴)' = ۲(x^۲ + ۳x + ۴)(۲x + ۳) =$$
$$= ۴x^۳ + ۱۸x^۲ + ۲۴x + ۲۴$$

۵) مشتق عکس تابع. تابع $y = f(x)$ را مشتق‌پذیر و $x = f^{-۱}(y)$ را تابع معکوس آن می‌گیریم. چون تابع $x = f^{-۱}(y)$ پیوسته است و $y'_x \neq ۰$ پس می‌توان نوشت

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{۱}{\frac{\Delta x}{\Delta y}} \Rightarrow y'_x = \frac{۱}{x'_y} \text{ یا } x'_y = \frac{۱}{y'_x}$$

به‌عنوان‌نمونه، عکس‌تابع $y = \sqrt{x}$ عبارت‌است از $x = y^۲ \, (y > ۰)$. و چون $x'_y = ۲y$ پس

$$y'_x = \frac{۱}{۲y} = \frac{۱}{۲\sqrt{x}}$$

۶) وقتی تابع به‌صورت پارامتری داده شده باشد. فرض کنید تابعی به‌صورت پارامتری

$$x = \varphi(t),\ y = g(t)$$

داده شده باشد. این برابری روشن است:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta t} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

که اگر $\Delta x \to ۰$ به‌این‌صورت درمی‌آید:

$$y'_x = y'_t \times t'_x \Rightarrow y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$$

مثال ۱۲. مشتق y'_x را محاسبه کنید، به‌شرطی که داشته باشیم:

$$x = \frac{۳t}{۱ + t^۳}, y = \frac{۳t^۲}{۱ + t^۳}$$

حل. داریم:

$$x'_t = \frac{۳(۱ - ۲t^۳)}{(۱ + t^۳)^۲} \text{ و } y'_t = \frac{۳t(۱ - ۲t^۴)}{(۱ + t^۳)^۲}$$

و بنابراین، برای y'_x خواهیم داشت:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{۳t(۱ - t^۴)}{۱ - ۲t^۳}$$

۷) محاسبهٔ y'_x، وقتی y برحسب x داده نشده باشد: اگر معادله‌ای به‌صورت

$$f(x, y) = ۰$$

داده شده باشد و نتوانیم y را برحسب x محاسبه کنیم، از دو طرف برابری نسبت به x مشتق می‌گیریم (که البته باید y را تابعی از x به‌حساب آورد) و سپس در برابری حاصل، y' را به‌دست می‌آوریم.

مثال ۱۳. y'_x را محاسبه کنید، به‌شرطی که داشته باشیم:

$$x^۲ + y^۲ - ۲x + ۲y = ۷$$

حل. از دو طرف برابری نسبت به x مشتق می‌گیریم:

$$۲x + ۲yy' - ۲ + ۲y' = ۰ \Rightarrow y' = \frac{۱ - x}{y + ۱}$$

۸) مشتق تابع‌های سادهٔ مثلثاتی. الف) برای $y = \sin x$ داریم:

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = ۲\cos\left(x + \frac{\Delta x}{۲}\right)\sin\frac{\Delta x}{۲}$$

(از اتحاد $\sin a - \sin b = ۲\cos\frac{a+b}{۲}\sin\frac{a-b}{۲}$ استفاده کرده‌ایم).
بنابراین

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos\left(x + \frac{\Delta x}{۲}\right) \cdot \frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{۲}\right)}{\left(\frac{\Delta x}{۲}\right)}$$

که باتوجه به این‌که $\lim\limits_{\alpha \to ۰} \frac{\sin\alpha}{\alpha} = ۱$ (حد)، به‌دست می‌آید:

$$y' = \lim_{\Delta x \to ۰}\left[\cos\left(x + \frac{\Delta x}{۲}\right) \cdot \frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{۲}\right)}{\left(\frac{\Delta x}{۲}\right)}\right] = \cos x$$

اگر داشته‌باشیم $y = \sin x$، آن‌وقت $y' = \cos x$.

ب) $y = \cos x$ را به‌صورت $y = \sin\left(\frac{\pi}{۲} + x\right)$ می‌نویسیم. درنتیجه

$$y' = \left(\frac{\pi}{۲} + x\right)' \cdot \sin\left(\frac{\pi}{۲} + x\right) = -\cos x$$

در واقع $u = \frac{\pi}{۲} + x$ گرفتیم و از قانون مشتق تابع مرکب استفاده کردیم.

ج) $y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$. باید از کسر مشتق بگیریم:

$$y' = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - (\cos x)' \cdot \sin x}{\cos^۲ x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$$

یعنی برای $y = \tan x$ به‌دست می‌آید: $y' = 1 + \tan^2 x$.

به‌همین‌ترتیب، برای $y = \cot x$ داریم: $y' = -(1 + \cot^2 x)$.

مثال ۱۴. مطلوب است محاسبهٔ مشتق $y = \dfrac{1 + 2\sin x}{1 - 2\cos x}$.

حل. به‌ترتیب داریم:

$$y' = \frac{(1 + 2\sin x)'(1 - 2\cos x) - (1 - 2\cos x)'(1 + 2\sin x)}{(1 + 2\cos x)^2}$$

$$= \frac{2\cos x(1 - 2\cos x) - 2\sin x(1 + 2\sin x)}{(1 - 2\cos x)^2} =$$

$$= \frac{2(\cos x - \sin x)(1 + 2\sin x + 2\cos x)}{(1 - 2\cos x)^2}$$

مثال ۱۵. مطلوب است مشتق تابع $y = \cos^3 4x$.

حل. به‌ترتیب داریم:

$$y' = 3\cos^2 4x(\cos 4x)' = 3\cos^2 4x(-\sin 4x)(4x)' =$$
$$= -12\cos^2 4x \sin 4x$$

□

مشتق‌های مرتبهٔ بالاتر. اگر از مشتق یک تابع، دوباره مشتق بگیریم، مشتق مرتبهٔ دوم را به‌دست آورده‌ایم که با y'' نشان داده می‌شود. برای مثال

$$y = \sin x + \cos x - 1;$$
$$y' = \cos x - \sin x;$$
$$y'' = -\sin x - \cos x$$

به‌همین‌ترتیب می‌توان مشتق مرتبهٔ سوم (y''') و مرتبه‌های بالاتر را به‌دست آورد.

یادداشت. برای مشتق‌های مرتبهٔ اول، مرتبهٔ دوم و مرتبهٔ سوم، از نمادهای y'، y'' و y''' استفاده می‌شود، ولی برای مشتق‌های مرتبه‌های بالاتر، بهتر است عددهای رومی به‌کار رود: مشتق مرتبهٔ چهارم y^{IV}، مشتق مرتبهٔ پنجم y^{V} و غیره.

از عددهای معمولی هم می‌توان برای نماد مشتق استفاده کرد، به‌شرطی که آن‌ها را داخل پرانتز قرار دهیم:

$y^{(۴)}$، یعنی مشتق مرتبهٔ چهارم، $y^{(۵)}$ یعنی مشتق مرتبهٔ پنجم و غیره. به‌ویژه در حالت‌هایی که مرتبهٔ مشتق با حرف بیان شده است، باید از این روش استفاده کرد:

$y^{(n)}$، یعنی مشتق مرتبهٔ nام و $y^{(p-۱)}$ یعنی مشتق مرتبهٔ $(p-۱)$ام.

تمرین‌ها

۶۶. تنها با استفاده از تعریف، مشتق تابع‌هایی را که ضابطهٔ آن‌ها داده شده است، پیدا کنید.

$$۱)\ y=(۲x+۱)^۲;\quad ۲)\ y=\frac{۱}{x-۳};$$
$$۳)\ y=\frac{۱}{۳}x^۳;\qquad ۴)\ y=\sqrt{۱+۲x}$$

۶۷. مشتق تابع‌هایی را که ضابطهٔ آن‌ها داده شده است، پیدا کنید:

$$۱)\ y=\frac{۱+\sqrt{x}}{۱-\sqrt{x}};\qquad ۲)\ y=\frac{x-۱}{\sqrt{۱-x-x^۲}};$$

$$۳)\ y=\frac{۱}{x+\sqrt{a^۲+x^۲}};\qquad ۴)\ y=\frac{۳-x^۲}{۶\sqrt{x}};$$

$$۵)\ y=x^۲\sqrt{۱۰-x^۲};\qquad ۶)\ y=\frac{\sqrt{x^۲+۴}}{x^۲};$$

$$۷)\ y=(x^۲-۳x+۱)^{۴۰};$$

$$۸)\ y=(۳x+۱)^{۱۰۰}(x^۲-x+۱)^{۵۰};$$

$$۹)\ y=(x-۱)^{۱۴}(۲x+۱)^{۷}(۷x-۲)^{۲}$$

۶۸. مشتق y را نسبت به x و، سپس مشتق x را نسبت به y از برابری‌های زیر پیدا کنید:

$$۱)\ x^۲+۲y^۲-۳xy+x-y=۷;\qquad ۲)\ x^۲y^۲+x^۴-xy^۳+y=۱;$$

$$۳)\ \begin{cases} x=\dfrac{t+۱}{t} \\ y=\dfrac{t-۱}{t} \end{cases};\qquad ۴)\ \begin{cases} x=\dfrac{۱}{۲-t}; \\ y=۳t^۲+۱ \end{cases}$$

۶۹. مشتق بگیرید:

$$۱)\ y=|x|;\qquad ۲)\ y=x|x|;$$

$$۳)\ y=(x-۱)^۲|(x+۱)^۳|;\qquad ۴)\ y=f(x^۲);$$

$$۵)\ y=x\cdot f\left(\frac{۱-x^۲}{۱+x^۲}\right);\qquad ۶)\ y=f(f(x))$$

۷۰. مشتق بگیرید:

$$۱)\ y = \tan x + \cot x; \qquad ۲)\ y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x};$$

$$۳)\ y = x \cdot \sin x; \qquad ۴)\ y = \frac{\tan x + \cot x}{\tan x - \cot x};$$

$$۵)\ y = \sqrt{۱ - \sin x}; \qquad ۶)\ y = \sqrt[۳]{\frac{۱ - \sin x}{۱ + \sin x}};$$

$$۷)\ y = \sin(\cos x); \qquad ۸)\ y = \cos \sqrt[۳]{x^۲};$$

$$۹)\ y = ۴\sqrt[۳]{\cot^۲ x} - \sqrt[۳]{\cot^۸ x};$$

$$۱۰)\ y = \sin(\cos^۲ x) + \cos(\sin^۲ x);$$

$$۱۱)\ y = |\sin^۳ x|$$

$$۱۲)\ y = f(\sin^۲ x) + f(\cos^۲ x);$$

$$۱۳)\ y = \sin^۵ ۳x; \qquad ۱۴)\ y = \sqrt[۳]{\cos^۲ ۷x}$$

۷۱. ۱) x با واحد درجه بیان شده است، مشتق $y = \sin x^\circ$ را پیدا کنید؛ ۲) اگر x با واحد گراد بیان شده باشد، مشتق $y = \cos x^g$ را پیدا کنید.

۷۲. $f'(۰)$ را پیدا کنید، به‌شرطی که داشته باشیم:

$$f(x) = x(x - ۱)(x - ۲)\ldots(x - ۱۰۰۰)$$

۷۳. برای $x > ۰$، می‌دانیم $y = x$. مطلوب است محاسبهٔ

$$۱)\ y'_x; \quad ۲)\ y'_{(mx)}; \quad ۳)\ y'_{x^۲};$$
$$۴)\ y'_{\sqrt{x}}; \quad ۵)\ y'_{x^۳}; \quad ۶)\ y'_{\sqrt[۳]{x}}$$

۷۴. بافرض $x = \sqrt[۳]{۱ - \sqrt{t}}, y = \sqrt{۱ - \sqrt[۳]{t}}$، مشتق y را نسبت به x محاسبه کنید.

۷۵. $f(x)$ یک چندجمله‌ای است. $f(x)$ را به‌دست آورید، به‌شرطی که بدانیم:

$$۱)\ f(f'(x)) = ۴x^۲ - ۶x + ۲$$

$$۲)\ f(f'(x)) = ۲۷x^۶ - ۲۷x^۴ + ۶x^۲ + ۲$$

* ۷۶. y'' را مشتق دوم y می‌گیریم. ثابت کنید، برای تابع با ضابطهٔ $y = \sqrt{\frac{۱}{\cos ۲x}}$ داریم:

$$y + y'' = ۳y^۵$$

* ۷۷. برای تابع با ضابطهٔ $y = \frac{۱}{x-a} - \frac{۱}{x-b}$، ثابت کنید حاصل عبارت $\frac{۲y'^۲ - yy''}{y^۳}$ به x بستگی ندارد.

* ۷۸. برای تابع باضابطهٔ $y = (x + \sqrt{x^۲ - ۱})^n$، این عبارت را محاسبه کنید:

$$M = (x^۲ - ۱)y'' + xy' - n^۲y$$

* ۷۹. می‌دانیم $y = \frac{۱}{\sqrt{x^۲ + ax + b}}$. حاصل این عبارت را محاسبه کنید:

$$N = yy'' - ۳y'^۲ + y^۴$$

* ۸۰. مشتق مرتبهٔ nام را پیدا کنید:

$$۱)\ y = \sin x; \qquad ۲)\ y = \frac{۱}{x-a}; \qquad ۳)\ y = \frac{۲x+۱}{x-۱}$$

[مساله‌های مربوط به تعبیر هندسی و تعبیر مکانیکی مشتق را در فصل بعد ببینید.]

۴. کاربردهای مشتق

§۱. مماس و قائم بر منحنی

۱. در فصل قبل، ضمن تعبیر هندسی مشتق، به این دو نتیجه رسیدیم:

الف) ضریب زاویهٔ مماس بر نمودار $y = f(x)$ در نقطهٔ به طول $x_{\circ}$، برابر است با $f'(x_{\circ})$؛

ب) اگر m را ضریب زاویهٔ مماسی بر نمودار $y = f(x)$ بگیریم، به یاری معادلهٔ $m = f'(x)$، طول نقطهٔ تماس به‌دست می‌آید.

مثال ۱. از نقطهٔ به‌طول $x_{\circ} = ۲$ واقع بر نمودار تابع $y = \frac{x}{x - ۱}$ مماسی بر نمودار رسم کرده‌ایم. معادلهٔ مماس را پیدا کنید.

حل. چون نقطهٔ به طول ۲ روی نمودار است، با قرار دادن $x_{\circ} = ۲$ در معادلهٔ نمودار، عرض نقطهٔ تماس به‌دست می‌آید. مشتق $y = \frac{x}{x - ۱}$ به‌صورت $y' = \frac{-۱}{(x - ۱)^{۲}}$ درمی‌آید که با قرار دادن $x_{\circ} = ۲$ در آن، ضریب زاویهٔ مماس، برابر ۱− می‌شود. از خط راست مماس، یک نقطهٔ $T(۲, ۲)$ (نقطهٔ تماس) و ضریب زاویهٔ آن $m = -۱$ معلوم است و می‌توان معادله خط مماس را پیدا کرد.

پاسخ. $x + y = ۴$.

مثال ۲. از نقطهٔ به عرض ۷ واقع بر نمودار معادلهٔ

$$x^۲ + y^۲ - ۴x - ۶y = ۱۲ \qquad (۱)$$

مماسی بر آن رسم کرده‌ایم. اگر طول نقطهٔ تماس عددی مثبت باشد، معادلهٔ خط راست مماس را پیدا کنید.

حل. با قرار دادن $y = ۷$ در معادلهٔ نمودار، جواب‌های $x_۱ = ۵$ و $x_۲ = -۱$ برای طول نقطهٔ تماس به‌دست می‌آید که، باتوجه به شرط مسالهٔ $T(۵, ۷)$ را باید به‌عنوان نقطهٔ تماس در نظر گرفت. برای پیدا کردن ضریب زاویهٔ مماس، باید مقدار مشتق را در نقطهٔ تماس به‌دست آوریم. از دو طرف معادلهٔ (۱) نسبت به x مشتق می‌گیریم:

$$۲x + ۲yy' - ۴ - ۶y' = ۰ \Rightarrow y' = \frac{۲ - x}{y - ۳}$$

اگر به‌جای x و y مشتق، طول و عرض نقطهٔ تماس را قرار دهیم، $m = -\frac{۳}{۴}$ ضریب زاویه مماس به‌دست می‌آید. از خط راست مماس، یک نقطه (نقطهٔ تماس) و ضریب زاویهٔ آن معلوم است و می‌توان معادله‌اش را نوشت.

پاسخ. $۳x + ۴y = ۴۳$.

مثال ۳. از نقطهٔ M به‌عرض ۲− و واقع بر محور $y'y$، مماسی بر نمودار تابع $y = ۲x^۲ - ۳x$ رسم کرده‌ایم. معادله خط راست مماس را به‌دست آورید.

حل. $M(۰, -۲)$ روی منحنی تابع نیست و، بنابراین، از نقطهٔ تماس آگاهی نداریم تا به‌یاری آن بتوانیم ضریب زاویهٔ مماس را پیدا کنیم. نقطهٔ تماس را T و به‌طول α می‌گیریم. عرض نقطه برابر $۲\alpha^۲ - ۳\alpha$ می‌شود:

$$T(\alpha, ۲\alpha^۲ - ۳\alpha)$$

مشتق تابع $y' = ۴x - ۳$ و بنابراین ضریب زاویهٔ مماس برابر $۴\alpha - ۳$ است. ولی خط مماس از دو نقطهٔ M و T می‌گذرد، بنابراین می‌توان ضریب زاویهٔ مماس را به‌یاری مختصات این دو نقطه پیدا کرد:

$$m_{MT} = \frac{y_T - y_M}{x_T - x_M} = \frac{(۲\alpha^۲ - ۳\alpha) + ۲}{\alpha - ۰} = \frac{۲\alpha^۲ - ۳\alpha + ۲}{\alpha}$$

باید $۴\alpha - ۳$ و $\frac{۲\alpha^۲ - ۳\alpha + ۲}{\alpha}$، یعنی مقدارهایی که برای ضریب زاویهٔ مماس به‌دست آورده‌ایم، با هم برابر باشند:

$$\frac{۲\alpha^۲ - ۳\alpha + ۲}{\alpha} = ۴\alpha - ۳ \Rightarrow \alpha = \pm ۱$$

معلوم می‌شود از نقطه A می‌توان دو مماس بر نمودار مفروض رسم کرد که ۱ و ۱− طول‌های نقطه‌های تماس آن‌هاست. دیگر، با در دست داشتن نقطهٔ M و نقطه‌های تماس، می‌توان معادله‌های آن‌ها را پیدا کرد.

پاسخ. $x - y - ۲ = ۰$ و $۷x + y + ۲ = ۰$.

یادداشت. در جلدهای پیشین «ریاضیات محاسبه‌ای» دیده‌ایم که معادلهٔ مماس را، بدون استفاده از مشتق هم می‌توان پیدا کرد. اگر در مثال ۳، ضریب زاویهٔ مماس را m بگیریم، معادلهٔ مماس به‌صورت $y = mx - ۲$ درمی‌آید. برای این‌که این خط راست بر نمودار $y = ۲x^۲ - ۳x$ مماس باشد، باید از حل آن‌ها با یکدیگر (به‌عنوان یک دستگاه) به معادله‌ای با دو ریشهٔ برابر برسیم (یعنی در دو نقطهٔ منطبق برهم، با یکدیگر مشترک باشند):

$$\begin{cases} y = mx - ۲ \\ y = ۲x^۲ - ۳x \end{cases} \Rightarrow ۲x^۲ - (m + ۳)x + ۲ = ۰$$

برای این‌که، این معادلهٔ درجه دوم دارای دو ریشهٔ برابر (یا یک ریشهٔ مضاعف) باشد، باید مبین آن برابر صفر شود:

$$\Delta = (m + ۳)^۲ - ۱۶ = ۰ \Rightarrow m = ۱,\ -۷$$

و این‌ها، همان ضریب زاویه‌های مماس‌ها هستند که به‌یاری مشتق به‌دست آورده‌بودیم.

مثال ۴. از نقطهٔ به‌طول ۴ واقع بر خط راست $x + y + ۱ = ۰$، مماس‌هایی بر نمودار

$$x^۲ + ۲y^۲ + ۲x - ۳y = ۸ \qquad (۱)$$

رسم کرده‌ایم مختصات نقطه‌های تماس و معادله‌های خط‌های مماس را پیدا کنید.

حل. اگر در معادلهٔ $x + y + ۱ = ۰$ قرار دهیم $x = ۴$، به‌دست می‌آید $y = -۵$. یعنی از نقطهٔ $M(۴, -۵)$ مماس‌هایی بر نمودار معادلهٔ (۱) رسم کرده‌ایم. مختصات نقطهٔ تماس را $T(\alpha, \beta)$ می‌گیریم. این مختصات باید در معادلهٔ (۱) صدق کنند:

$$\alpha^۲ + ۲\beta^۲ + ۲\alpha - ۳\beta = ۸ \qquad (۲)$$

برای پیدا کردن ضریب زاویهٔ خط راست مماس، باید مختصات نقطهٔ T (نقطهٔ تماس) را در y'_x قرار داد. از دو طرف معادلهٔ (۱)، نسبت به x، مشتق می‌گیریم:

$$۲x + ۴yy' + ۲ - ۳y' = ۰ \Rightarrow y' = -\frac{۲x + ۲}{۴y - ۳}$$

یعنی، برای ضریب زاویهٔ مماس داریم:

$$m = -\frac{۲\alpha + ۲}{۴\beta - ۳}$$

ولی مماس از دو نقطهٔ M و T می‌گذرد. پس ضریب زاویهٔ آن برابر است با

$$m = \frac{\beta + ۵}{\alpha - ۴}$$

دو مقداری را که برای m به‌دست آورده‌ایم، با هم برابر قرار می‌دهیم:

$$\frac{\beta+۵}{\alpha-۴}=-\frac{۲\alpha+۲}{۴\beta-۳}\Rightarrow ۲\alpha^۲+۴\beta^۲-۶\alpha+۱۷\beta=۲۳ \quad (۳)$$

α و β جواب دستگاه شامل دو معادلهٔ (۲) و (۳) است. اگر معادلهٔ (۳) را از دو برابر معادلهٔ (۲) کم کنیم:

$$۱۰\alpha-۲۳\beta+۷=۰\Rightarrow \alpha=\frac{۲۳\beta-۷}{۱۰} \qquad (۴)$$

این مقدار α باید در هریک از معادله‌های (۲) و (۳) صدق کند، آن را در معادلهٔ (۲) قرار می‌دهیم:

$$\left(\frac{۲۳\beta-۷}{۱۰}\right)^۲+۲\beta^۲+۲\left(\frac{۲۳\beta-۷}{۱۰}\right)-۳\beta=۸$$

که از آن‌جا، برای β، پس از ساده کردن، به معادلهٔ درجه دوم زیر می‌رسیم:

$$۹\beta^۲-۲\beta-۱۱=۰\Rightarrow \beta=-۱,\frac{۱۱}{۹}$$

این‌ها، عرض‌های نقطه‌های تماس‌اند که، با قرار دادن در (۴)، طول‌های نقطه‌های تماس هم به‌دست می‌آید، اگر نقطه‌های تماس را $T_۱$ و $T_۲$ بنامیم:

$$T_۱(-۳,-۱),\ T_۲\left(\frac{۱۹}{۹},\frac{۱۱}{۹}\right)$$

و دیگر معادله‌های مماس‌ها به‌سادگی به‌دست می‌آیند:

$$MT_۱:\ ۴x+۷y+۱۹=۰;\quad MT_۲:\ ۵۶x+۱۷y-۱۳۹=۰$$

۲. قائم بر منحنی. به خط راستی قائم بر منحنی گویند که در نقطهٔ برخورد با منحنی، بر مماسی که از همین نقطه بر منحنی رسم می‌شود، عمود باشد. نقطهٔ برخورد قائم را با منحنی، **پای قائم** گویند.

مثال ۵. از نقطه به طول ۲ واقع بر نمودار تابع $y = x^{۳} - ۳x$، قائمی بر منحنی نمودار رسم کرده‌ایم. مطلوب است معادلهٔ خط قائم.

حل. پای قائم را P می‌نامیم: $P(۲, ۲)$. ضریب زاویهٔ مماس در نقطهٔ P بر نمودار، برابر است با مشتق تابع به‌ازای طول نقطهٔ P.

$$y' = ۳x^{۲} - ۳, \quad m_{۱} = ۹$$

پس ضریب زاویهٔ قائم در این نقطه $m = -\frac{۱}{۹}$ می‌شود و با در دست داشتن مختصات پای قائم، معادلهٔ خط راست قائم بر منحنی به‌دست می‌آید.

پاسخ. $x + ۹y = ۲۰$.

مثال ۶. از نقطهٔ به‌طول $-\frac{۱}{۴}$ واقع بر محور $x'x$ قائم‌هایی بر نمودار $y = x^{۲} - ۱$ رسم کرده‌ایم. مختصات پای قائم‌ها را پیدا کنید.

حل. راهنمایی. پای قائم را $P(\alpha, \alpha^{۲} - ۱)$ بگیرید. ضریب زاویه خط قائم به‌یاری مشتق برابر $-\frac{۱}{۲\alpha}$ و به‌یاری خط قائم MP، برابر $\frac{\alpha^{۲} - ۱}{\alpha + \frac{۱}{۴}}$ می‌شود. درنتیجه، به معادلهٔ زیر برای محاسبهٔ پای قائم می‌رسید:

$$۸\alpha^{۳} - ۴\alpha + ۱ = ۰ \Rightarrow (۸\alpha^{۳} - ۱) - ۴\alpha + ۲ = ۰ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (۲\alpha - ۱)(۴\alpha^{۲} + ۲\alpha + ۱) - ۲(۲\alpha - ۱) = ۰ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (۲\alpha - ۱)(۴\alpha^{۲} + ۲\alpha - ۱) = ۰$$

از نقطه M سه قائم بر منحنی رسم می‌شود که طول پای قائم‌ها چنین است:

$$\alpha = \frac{۱}{۲}, \ \frac{\sqrt{۵} - ۱}{۴}, \ -\frac{\sqrt{۵} + ۱}{۴}$$

اگر پای قائم‌ها را P_1، P_2 و P_3 بگیریم:

$$P_1 \left| \begin{array}{l} \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{4} \end{array} \right. ، P_2 \left| \begin{array}{l} \frac{\sqrt{5}-1}{4} \\ -\frac{5+\sqrt{5}}{8} \end{array} \right. ، P_3 \left| \begin{array}{l} -\frac{\sqrt{5}+1}{4} \\ -\frac{5-\sqrt{5}}{8} \end{array} \right.$$

§۲. جهت تغییر تابع و نقطه‌های ماکزیمم و می‌نیمم نسبی.

در بخش پیش دیدیم، اگر $f(x)$ در بازهٔ $[a,b]$ پیوسته و مشتق‌پذیر باشد، آن‌وقت در حالت $f'(x) > 0$ صعودی و در حالت $f'(x) < 0$ نزولی است.

برای $x_0 \in [a,b]$، که در آن $f'(x_0) = 0$، تنها می‌توان گفت که نمودار $f(x)$ در نقطهٔ $x = x_0$ مماسی موازی محور $x'x$ دارد.

مثال ۷. تابع با ضابطهٔ $y = \frac{x}{x^2 - x + 1}$ در چه فاصله‌هایی صعودی و در چه فاصله‌هایی نزولی است؟

حل. باید ببینیم، مشتق تابع، در چه فاصله‌هایی مثبت و در چه فاصله‌هایی منفی است:

$$y = \frac{x^2 - x + 1 - x(2x-1)}{(x^2 - x + 1)^2} = \frac{-x^2 + 1}{(x^2 - x + 1)^2}$$

مخرج کسر مشتق همیشه مثبت است، پس علامت y' به علامت صورت کسر بستگی دارد. صورت کسر عبارتی درجه دوم و دارای دو ریشه است: ۱ و ۱−. بنابراین

۱) اگر $-1 < x < 1$ آن‌گاه $y' > 0$ و تابع صعودی است؛

۲) اگر $x < -1$ یا $x > 1$، آن‌گاه $y' < 0$ و تابع نزولی است؛

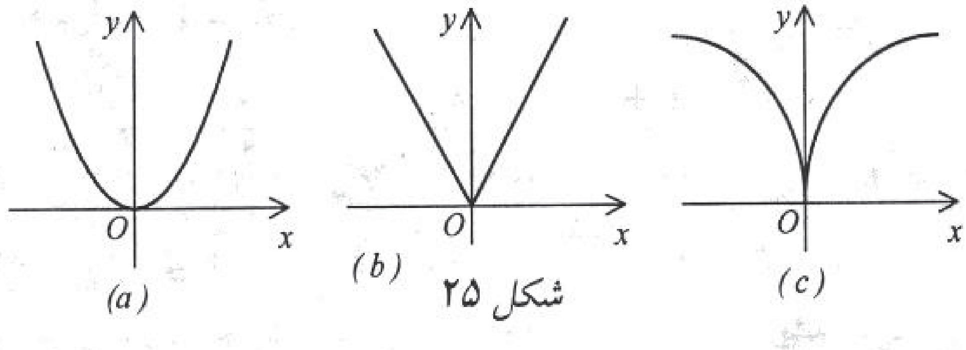
۳) اگر $x = 1$ یا $x = -1$، آن‌گاه $y' = 0$ و نمودار تابع مماسی موازی محور $x'x$ دارد.

همهٔ این‌ها را می‌توان در یک جدول نشان داد:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y		$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$	

این تابع در نقطهٔ به‌طول $1-$، یعنی در نقطه $\left(-1, -\frac{1}{3}\right)$، به می‌نیمم نسبی و در نقطهٔ به‌طول 1، یعنی نقطه $(1, 1)$ به ماکزیمم نسبی خود رسیده است. در همین نقطه‌ها، مشتق برابر صفر شده است. ولی صفر شدن مشتق، برای نقطه‌های می‌نیمم و ماکزیمم، نه شرط لازم است و نه شرط کافی.

به شکل ۲۵ توجه کنید. هر سه نمودار a، b و c در مبداء مختصات به می‌نیمم خود رسیده‌اند؛ در شکل ۲۵_a، در مبداء مختصات، محور $x'x$ مماس بر منحنی است، یعنی در این نقطه، مقدار مشتق برابر صفر است. در شکل ۲۵_b، مشتق در مبداء مختصات مقدار معینی نیست و سرانجام در شکل ۲۵_c، مقدار مشتق در مبداء مختصات برابر ∞ شده است (مماس بر نمودار در این نقطه، بر محور $y'y$ منطبق است. به‌این ترتیب:

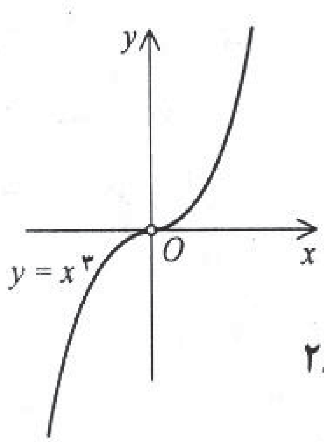


شکل ۲۵

$y' = 0$ شرط لازم برای نقطهٔ می‌نیمم (و یا ماکزیمم) نیست.

اکنون به شکل ۲۶ توجه کنید: مماس بر منحنی نمودار در مبداء مختصات بر محور $x'x$ منطبق است، یعنی در این نقطه، مشتق برابر صفر شده است. ولی این نقطه نه نقطهٔ می‌نیمم است و نه نقطهٔ ماکزیمم. به این ترتیب:

$y' = 0$ شرط کافی برای نقطهٔ ماکزیمم (یا می‌نیمم) نیست.



شکل ۲۶

تعریف. اگر $f(x)$ در بازهٔ $[a, b]$ پیوسته باشد، نقطهٔ به طول $c \in (a, b)$ را می‌نیمم $f(x)$ گویند به‌شرطی که تابع پیش از نقطهٔ به‌طول c نزولی و بعد از این نقطه صعودی باشد. به‌همین ترتیب، نقطهٔ به طول $c' \in (a, b)$ را ماکزیمم گویند به‌شرطی که تابع در نقطهٔ به‌طول c' از صعودی به نزولی برود.

باتوجه به این تعریف و ملاحظهٔ جدول مثال ۷، نقطهٔ به طول ۱− می‌نیمم و نقطهٔ به‌طول ۱ ماکزیمم تابع مفروض است.

یادداشت. این تعریف، مربوط به ماکزیمم و می‌نیمم نسبی است نه ماکزیمم و می‌نیمم مطلق. ماکزیمم نسبی نقطه‌ای از منحنی است که عرض آن نسبت به عرض‌های نقطه‌های مجاور خود بیشترین مقدار باشد، در حالی که ماکزیمم مطلق به‌معنای بیشترین مقدار عرض برای تمامی تابع است. به همین ترتیب دربارهٔ می‌نیمم نسبی و می‌نیمم مطلق.

ماکزیمم و می‌نیمم نسبی مربوط به نمودار تابع است و، بنابراین، خود صورت مساله نشان می‌دهد، منظور ماکزیمم و می‌نیمم نسبی است یا مطلق:

اگر بگوییم نقطه‌های ماکزیمم و می‌نیمم را روی نمودار تابع پیدا کنید، منظور ماکزیمم و می‌نیمم نسبی است، ولی اگر بگوییم، حجم فلان جسم، با چه شرطهایی ماکزیمم می‌شود، منظور ماکزیمم مطلق است.

به‌همین مناسبت، و به‌دلیل روشن بودن مطلب، اغلب از ذکر واژه‌های

«نسبی» و «مطلق» صرف‌نظر می‌کنند.

به‌طور کلی می‌توان گفت:

به نقطه‌ای از نمودار ماکزیمم (یا می‌نیمم) گوییم که در آن‌جا، مشتق تغییر علامت دهد و از مثبت به منفی (یا از منفی به مثبت) برود. ماکزیمم و می‌نیمم را، «اکستره‌مم» هم می‌گویند: نقطهٔ اکستره‌مم، یعنی نقطهٔ ماکزیمم یا نقطهٔ می‌نیمم.

به یک نکته هم توجه کنید: در مساله‌ها، وقتی صحبت بر سر طول نقطهٔ ماکزیمم یا طول نقطهٔ می‌نیمم باشد، واژه «طول» را می‌آورند و در مثل می‌گویند: نمودار در نقطهٔ به طول a به نقطهٔ ماکزیمم خود می‌رسد. ولی وقتی سخن از عرض اکستره‌مم باشد، واژهٔ «عرض» را نمی‌آورند و می‌گویند: نمودار یا تابع ماکزیممی برابر M دارد. دلیل این مطلب روشن است: تابع به ماکزیمم می‌رسد و تابع، یعنی y (عرض نقطه).

مثال ۸. جهت تغییر تابع و نقطه‌های ماکزیمم و می‌نیمم را در این تابع پیدا کنید.

$$y = x^{۳} - ۲x^{۲} - ۱۵x + ۴$$

حل. $y' = ۳x^{۲} - ۴x - ۱۵$، مشتق تابع است که ریشه‌های آن برابر ۳ و $-\frac{۵}{۳}$ است. بنابراین اگر $x < -\frac{۵}{۳}$ یا $x > ۳$، آن‌وقت y صعودی است؛

اگر $-\frac{۵}{۳} < x < ۳$، آن‌وقت y نزولی است؛

مشتق در نقطهٔ $x = -\frac{۵}{۳}$ و $x = ۳$ برابر صفر است؛ در نقطهٔ $x = -\frac{۵}{۳}$ تابع از صعودی به نزولی و در نقطهٔ $x = ۳$ از نزولی به صعودی می‌رود، بنابراین نقطهٔ $\left(-\frac{۵}{۳}, ۲۴\frac{۲۲}{۲۷}\right)$ ماکزیمم و نقطهٔ $(۳, -۴۱)$ می‌نیمم

منحنی است.

x	$-\infty$		$-\frac{۵}{۳}$		۳		$+\infty$
y'		$+$	۰	$-$	۰	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$۲۴\frac{۲۲}{۲۷}$	$\searrow$	-۴۱	$\nearrow$	$+\infty$

مثال ۹. تابع با ضابطهٔ $y = \frac{x+m}{mx+۱}$، به‌ازای چه مقدارهایی از m نزولی و به‌ازای چه مقدارهایی از m صعودی است؟

حل. مشتق تابع به‌صورت $y' = \frac{۱-m^۲}{(mx+۱)^۲}$ درمی‌آید. مخرج کسر مشتق، مقداری است مثبت. بنابراین، علامت مشتق بستگی به علامت صورت کسر مشتق دارد:

اگر $-۱ < m < ۱$، آن‌وقت $y' > ۰$ و تابع صعودی است؛

اگر $m < -۱$ یا $m > ۱$، آن‌وقت $y' < ۰$ و تابع نزولی است؛

اگر $m = ۱$ یا $m = -۱$، آن‌وقت تابع مقداری است ثابت.

مثال ۱۰. a، b و c را طوری پیدا کنید که نمودار تابع

$$y = \frac{ax^۲ + bx + c}{x^۲ + ۱}$$

اکسترممی برابر -۱ روی محور $y'y$ داشته باشد و مماس در نقطهٔ به‌طول ۱ بر آن، موازی نیمساز ربع اول دستگاه محورهای مختصات باشد.

حل. نقطهٔ اکسترمم روی منحنی است و، بنابراین، باید مختصات آن در معادلهٔ تابع صدق کند که، در این صورت، به‌دست می‌آید: $c = -۱$ و معادلهٔ نمودار به‌صورت

$$y = \frac{ax^۲ + bx - ۱}{x^۲ + ۱}$$

درمی‌آید. در نقطهٔ اکسترمم، مشتق تغییر علامت می‌دهد. مشتق تابع چنین است:

$$y' = \frac{(۲ax + b)(x^۲ + ۱) - ۲x(ax^۲ + bx - ۱)}{(x^۲ + ۱)^۲}$$

مشتق به‌ازای $x = ۰$ (طول نقطهٔ اکسترمم) برابر b می‌شود و اگر بخواهیم، مشتق در این نقطه تغییر علامت بدهد، باید داشته باشیم: $b = ۰$؛ درنتیجه تابع مفروض به‌صورت

$$y = \frac{ax^۲ - ۱}{x^۲ + ۱}$$

درمی‌آید که، مشتق آن چنین است:

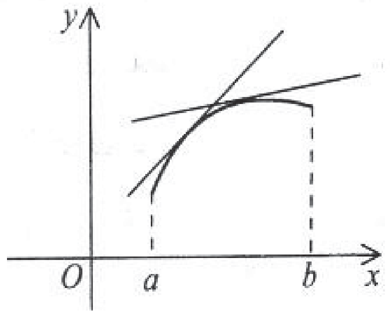
$$y' = \frac{۲ax(x^۲ + ۱) - ۲x(ax^۲ - ۱)}{(x^۲ + ۱)^۲}$$

مماس بر منحنی در نقطهٔ به‌طول ۱ ضریب زاویه‌ای برابر ۱ دارد. ضریب زاویهٔ مماس برابر است با مقدار مشتق به‌ازای طول نقطهٔ تماس؛ $x = ۱$ و $y' = ۱$ قرار می‌دهیم، نتیجه می‌شود: $a = ۱$ و تابع به‌این صورت درمی‌آید:

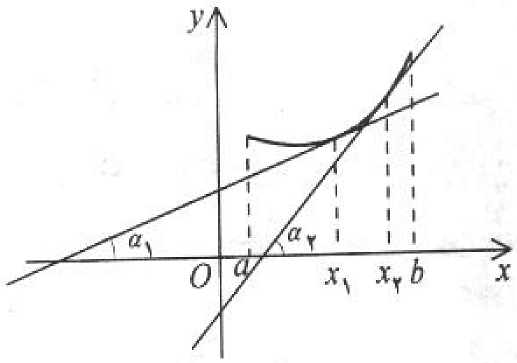
$$y = \frac{x^۲ - ۱}{x^۲ + ۱}$$

§۳. کاوی و کوژی منحنی و نقطهٔ عطف

تعریف. کوژی (یا تحدب) منحنی (نمودار تابع) را در بازه‌ای، به‌سوی پایین (یا دقیق‌تر: به‌سوی yهای منفی) گویند، وقتی که همهٔ نقطه‌های منحنی در بالای خط راست مماسی باشند که از نقطهٔ دلخواهی واقع در این بازه بر منحنی رسم شده است (شکل ۲۷).



شکل ۲۸



شکل ۲۷

در این حالت می‌توان گفت: کاوی (یا تقعر) منحنی به‌سوی yهای مثبت است.

اگر، برعکس، همهٔ نقطه‌های منحنی در بازه‌ای، زیر مماسی باشند که از نقطهٔ دلخواهی از این بازه رسم شده است (شکل ۲۸)، آن‌وقت گویند کوژی منحنی در این بازه به‌سوی بالا (یا به‌سوی yهای مثبت) است.

شرط کافی، برای تعیین سوی کوژی منحنی (نمودار تابع) را در یک بازهٔ مفروض می‌آوریم.

قضیه. اگر در بازهٔ مفروض (a, b) واقع در دامنهٔ تابع $y = f(x)$، که قابل مشتق‌گیری تا مرتبهٔ دوم است، $f''(x)$، یعنی مشتق مرتبهٔ دوم مثبت باشد، آن‌وقت نمودار تابع در این بازه، به‌سوی پایین کوژ است و، برعکس، اگر $f''(x)$ منفی باشد، کوژی منحنی به‌سوی yهای مثبت است.

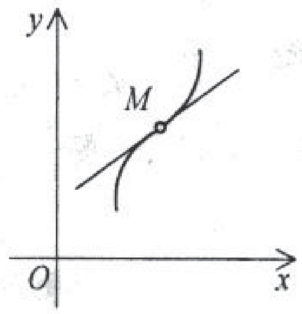
* **اثبات.** فرض می‌کنیم $f''(x) > 0$ و $x \in (a, b)$. مثبت بودن $f''(x)$ به‌معنای آن است که $f'(x)$، یعنی مشتق اول تابع، در این بازه صعودی است؛ این مطلب، به‌نوبهٔ خود به‌معنای آن است (شکل ۲۷) که زاویهٔ α، زاویهٔ مماس بر منحنی با محور Ox، همراه با x افزایش می‌یابد:

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow f'(x_1) < f'(x_2) \Leftrightarrow \alpha_1 < \alpha_2$$

ولی در این صورت، کوژی (یا تحدب) منحنی به‌طرف پایین است. اثبات

بخش دوم قضیه هم، به‌همین شیوه انجام می‌شود.

اگر در نقطه‌ای مثل M، جهت کوژی منحنی عوض شود، نقطهٔ M قطعه منحنی را به دو بخش تقسیم می‌کند که جهت کوژی منحنی در این دو بخش، با هم فرق دارد. در این صورت، M را **نقطهٔ عطف** در این قطعه منحنی گویند (شکل ۲۹).



شکل ۲۹

قضیه. اگر از تابع $y = f(x)$، در بازهٔ (a, b)، بتوان دو بار مشتق گرفت و نقطهٔ به‌طول $x_{\circ} \in (a, b)$ نقطهٔ عطف باشد، آن‌وقت $f''(x) = \circ$.

* **اثبات.** چون می‌توان از تابع دو بار مشتق گرفت و چون مشتق دوم در سمت راست و سمت چپ نقطهٔ عطف علامت‌های متفاوتی دارد، پس مشتق دوم در نقطهٔ $(x_{\circ}, f(x_{\circ}))$ باید برابر صفر باشد.

این قضیه، **شرط لازم** برای نقطهٔ عطف است، یعنی اگر M به‌طول $x_{\circ}$ نقطهٔ عطف باشد، آن‌گاه $f''(x_{\circ}) = \circ$، ولی از شرط $f''(x_{\circ}) = \circ$ نمی‌توان نتیجه گرفت که، بی‌تردید، نقطهٔ به‌طول $x_{\circ}$، نقطهٔ عطف است. به‌عنوان نمونه، برای تابع $y = x^{۴}$ داریم:

$$y'' = ۱۲x^{۲} \text{ و } y'' = \circ \Rightarrow x = \circ$$

ولی $x = \circ$، طول نقطهٔ عطف نیست، زیرا در این نقطه، جهت کوژی منحنی عوض نمی‌شود (y'' برای همهٔ مقدارهای حقیقی x مثبت و سوی

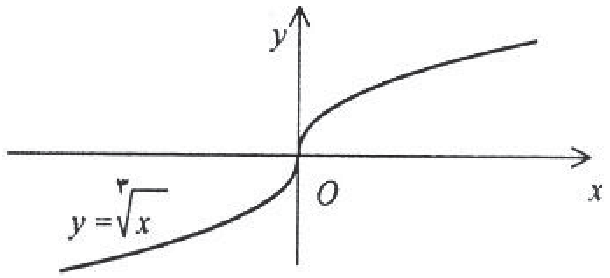
کوژی منحنی به‌سمت yهای منفی است).

حقیقت دیگری را هم یادآوری می‌کنیم: نقطهٔ عطف ممکن است در جایی هم که $f''(x)$ وجود ندارد، باشد.

مثال ۱۱. آیا منحنی تابع $y=\sqrt[3]{x}$، نقطهٔ عطف دارد؟

حل. داریم:

$$y'=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}},\quad y''=-\frac{2}{9\sqrt[3]{x^5}}$$



شکل ۳۰

نقطهٔ $x_0=0$ نقطهٔ عطف منحنی است، اگرچه مشتق دوم در این نقطه وجود ندارد (شکل ۳۰).

البته عکس این مطلب همیشه درست نیست؛ یعنی ممکن است مشتق دوم در نقطهٔ x_0 وجود نداشته باشد، درضمن، نقطهٔ به طول x_0 نقطهٔ عطف منحنی نباشد. برای نمونه، در تابع $y=\sqrt[3]{x}$ داریم: $y''=\frac{-2}{9\sqrt[3]{x^4}}$ و y'' به‌ازای $x=0$، وجود ندارد، باوجود این برای بقیهٔ نقطه‌ها $y''<0$ و همه‌جا کوژی منحنی به‌سوی yهای مثبت است و بنابراین، $x=0$ نقطهٔ عطف آن نیست (شکل ۲۵_c را ببینید).

به‌این ترتیب، شرط لازم و کافی برای این‌که $y=f(x)$ در نقطهٔ x_0، نقطهٔ عطف باشد، این است که $f''(x)$ در این نقطه تغییر علامت دهد؛ ممکن است در این نقطه $f''(x_0)=0$ باشد و یا $f''(x_0)$ وجود نداشته باشد.

مثال ۱۲. سوی کوژی نمودار تابع $y = x^3$ را بررسی کنید.

حل. داریم $y'' = 6x$. y'' برای $x = 0$ برابر صفر، برای $x < 0$ منفی و برای $x > 0$ مثبت است. در نقطهٔ $x = 0$، مشتق دوم تغییر علامت می‌دهد، یعنی جهت کوژی منحنی عوض می‌شود. بنابراین نقطهٔ به طول $x = 0$، نقطهٔ عطف منحنی است (شکل ۲۶).

§۴. طرح کلی بررسی تابع

وقتی یک تابع به‌صورت تحلیلی داده شده و رابطهٔ بین متغیر (x) و تابع (y) به‌یاری یک برابری معلوم باشد، می‌توان نمودار آن را رسم کرد. نمودار تابع می‌تواند رفتار آن را در نقطه‌های مختلف به‌طور عینی روشن کند و برخی از ویژگی‌های آن را به ما نشان دهد. در این‌جا برخی از نکته‌های لازم برای رسم نمودار و وش‌های مشخص کردن ویژگی‌های آن را آورده‌ایم.

۱) **تعیین دامنهٔ تابع.** قبل از هر چیز باید معلوم کرد، متغیر در چه بازه‌هایی می‌تواند عمل کند، یعنی به‌ازای چه مقدارهایی از x، تابع معین است.

در واقع تعیین دامنهٔ تابع برای بررسی آن، ضروری است. به‌این ترتیب، به‌ویژه بازه‌هایی که تابع در آن‌ها پیوسته است و نقطه‌هایی که در آن‌جاها ناپیوستگی دارد، معلوم می‌شود.

بُرد تابع را همیشه و به‌سادگی نمی‌توان پیدا کرد و در بسیاری حالت‌ها، بعد از رسم نمودار روشن می‌شود، باوجود این، بهتر است در حالت‌هایی که محاسبهٔ بُرد تابع (یعنی مقدارهای ممکن برای y) میسر است، از محاسبهٔ آن خودداری نکنیم. به‌ویژه، اگر تابع یا بخشی از تابع، در یک بازهٔ $[a, b]$ معین است، باید مقدارهای تابع را به‌ازای a و b (آغاز و پایان بازهٔ معین بودن تابع) پیدا کرد.

۲) **تقارن نمودار و دوره‌ای (متناوب) بودن آن.** آیا تابع زوج یا فرد است؟

آیا تابع دوره‌ای (متناوب) است؟ اگر با تابعی زوج سروکار داشته باشیم، محور $x'x$ محور تقارن آن است و در حالت فرد بودن، تابع، نسبت به مبداء مختصات متقارن است. این آگاهی‌ها، موجب ساده‌تر شدن رسم نمودار می‌شود، چراکه کافی است تنها بخشی از نمودار را رسم کنیم و بقیهٔ نمودار را به‌یاری متقارن بودن آن به‌دست آوریم. همچنین دوره‌ای بودن تابع، کار رسم را تنها به رسم نمودار در یک دورهٔ گردش (یا دورهٔ تناوب) منجر می‌کند.

۳) **اکسترممها.** با پیدا کردن مشتق‌های اول و دوم تابع، می‌توانیم سوی تغییر آن را در بازه‌های مختلف، همچنین نقطه‌های اکسترمم تابع (ماکزیمم و می‌نیمم)، سمت کاوی و کوژی نمودار و نقطه یا نقطه‌های احتمالی عطف را به‌دست آوریم.

۴) **نقطه‌های اضافی.** برای دقیق‌تر شدن نمودار، بهتر است نقطه‌های برخورد آن را با محور $y'y$ و، اگر ممکن است با محور $x'x$ و یا محور تقارن را (اگر وجود دارد) پیدا کنیم. پیدا کردن نقطه‌هایی از نمودار هم که قبل از اکسترممها و بعد از آن‌ها هستند، به‌دقت کار یاری می‌رساند.

۵) **تنظیم جدول تغییر.** بهتر است همه یافته‌ها را در جدولی منظم کنیم، در این جدول، مقدارهای متناظر x و y و علامت مشتق، در هر بازه روشن می‌شود و کار رسم نمودار را ساده می‌کند.

مثال ۱۳. نمودار تابع $y = x^{۳} - ۳x^{۲} + ۴$ را در دستگاه محورهای مختصات قائم رسم کنید.

حل. دامنهٔ تابع عبارت است از $x \in \mathbf{R}$. تابع، نقطه یا نقطه‌های ناپیوستگی ندارد. تابع نه فرد است و نه زوج. با آزمایش معلوم می‌شود که نمودار تابع، محوری موازی محور $y'y$ ندارد. ولی نمودار تابع دارای مرکز تقارن است که به‌سادگی می‌توان آن را به‌دست آورد. نقطهٔ $w(a, b)$ را مرکز تقارن منحنی می‌گیریم. با انتقال مبداء مختصات به نقطهٔ w، برای به‌دست

آوردن معادلهٔ جدید منحنی، باید قرار داد:

$$x = X + a, \quad y = Y + b$$

که در آن‌ها (x, y) مختصات قدیم و (X, Y) مختصات جدید نقطه‌های واقع بر نمودار است. داریم:

$$\begin{aligned} & Y + b = (X + a)^۳ - ۳(X + a)^۲ + ۴ \Rightarrow \\ & \Rightarrow Y = X^۳ + ۳(a - ۱)X^۲ + ۳a(a - ۲)X + \\ & (a^۳ - ۳a^۲ + ۴ - b) \end{aligned} \qquad (۱)$$

اگر w مرکز تقارن منحنی باشد، باید در معادلهٔ (۱)، با تبدیل X به $-X$، مقدار Y هم به $-Y$ تبدیل شود. جمله‌های $X^۳$ و $۳a(a-۲)X$ با تبدیل X به $-X$ تغییر علامت می‌دهند. بنابراین، برای این‌که Y به $-Y$ تبدیل شود، باید جملهٔ درجه دوم (نسبت به X) و مقدار ثابت وجود نداشته باشند:

$$a - ۱ = ۰, \quad a^۳ - ۳a^۲ + ۴ - b = ۰$$

که از آن‌جا به‌دست می‌آید: $a = ۱$، $b = ۲$. به‌این ترتیب، معلوم می‌شود که نقطهٔ $w(۱, ۲)$ مرکز تقارن نمودار تابع است.

برای پیدا کردن اکستره‌مم‌ها و تعیین جهت تغییر تابع، مشتق اول را محاسبه می‌کنیم:

$$y' = ۳x^۲ - ۶x$$

y' به‌ازای $x = ۰$ و $x = ۲$ برابر صفر می‌شود و در این دو نقطه تغییر علامت می‌دهد:

$$y' = ۰ \left| \begin{array}{l} x = ۰, \ x = ۲ \\ y = ۴, \ y = ۰ \end{array} \right.$$

با پیدا کردن مشتق دوم، می‌توان نقطهٔ عطف (اگر وجود داشته باشد) و جهت کوژی منحنی را پیدا کرد:

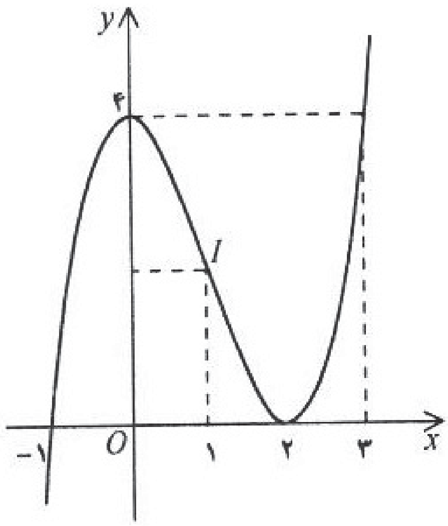
$$y'' = ۶x - ۶; \quad y'' = ۰ \left| \begin{array}{l} x = ۱ \\ y = ۲ \end{array} \right.$$

y'' در نقطهٔ $(۱, ۲)$ صفر می‌شود و در آنجا تغییر علامت می‌دهد؛ پس نقطهٔ عطف منحنی است.

منحنی به‌ازای $x = ۲$ و $x = -۱$، با محور $x'x$ نقطه‌های مشترک دارد و در نقطهٔ $(۰, ۴)$ از محور $y'y$ می‌گذرد. نقطهٔ به‌طول -۱ پیش از ماکزیمم و می‌نیمم قرار دارد. نقطهٔ $(۳, ۴)$ را هم که بعد از نقطه‌های اکستره‌مم است، به‌طور اضافی در نظر می‌گیریم.

اکنون، مقدارهای متناظر x و y و، همچنین، علامت مشتق را در یک جدول وارد می‌کنیم (منظور از I، نقطهٔ عطف است):

x	$-\infty$		-۱		۰		۱		۲		۳		$+\infty$
y'		$+$			۰	$-$			۰	$+$			
y'	$-\infty$	↗	۰	↗	۴	↘	۲	↘	۰	↗	۴	↗	$+\infty$



شکل ۳۱

نمودار تابع در شکل ۳۱ داده شده است.

یادداشت. می‌بینیم، در این‌جا، نقطهٔ عطف بر مرکز تقارن منحنی منطبق است. این حکم برای هر تابع چندجمله‌ای درجه سوم برقرار است. با همان روشی که در این مساله استفاده کردیم، می‌توان ثابت کرد که در تابع با ضابطهٔ $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$، مرکز تقارن با نقطهٔ عطف یکی است (خودتان ثابت کنید!).

* **مثال ۱۴.** تابع $y = \frac{x^4}{x^3 - 1}$ را بررسی و نمودار آن را رسم کنید.

حل. دامنهٔ تابع، همهٔ مقدارهای حقیقی x، به‌جز $x = 1$ است:

$$D_f = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$$

$x = 1$ نقطهٔ ناپیوستگی تابع است. ببینیم y در نزدیکی‌های $x = 1$ (دقیق‌تر، وقتی $x \to 1$) چه رفتاری دارد:

$$\text{حد}_{x \to 1^-} \frac{x^4}{x^3 - 1} = -\infty, \quad \text{حد}_{x \to 1^+} \frac{x^4}{x^3 - 1} = +\infty$$

وقتی x از سمت مقدارهای کوچکتر از ۱ به ۱ نزدیک می‌شود، مقدار y به‌سمت $-\infty$ بی‌نهایت می‌رود و وقتی x از سمت مقدارهای بزرگتر از ۱ به ۱ نزدیک می‌شود، y به‌سمت $+\infty$ می‌رود، مثل این است که نمودار تابع از دو طرف به خط راست $x = 1$ نزدیک می‌شود: از سمت چپ به نیم‌خط راست $x = 1$ $(y < 0)$ و از سمت راست به نیم‌خط راست $x = 1(y > 0)$. در واقع، هرچه مقدار x به ۱ نزدیک‌تر شود، نمودار تابع به خط راست $x = 1$ شبیه‌تر می‌شود.

درضمن روشن است که

$$\text{حد}_{x \to -\infty} \frac{x^4}{x^3 - 1} = -\infty, \quad \text{حد}_{x \to +\infty} \frac{x^4}{x^3 - 1} = +\infty \qquad (1)$$

اگر تابع را به‌صورت $y = x + \frac{x}{x^3 - 1}$ بنویسیم، وقتی x به‌سمت بی‌نهایت (مثبت یا منفی) میل کند، کسر $\frac{x}{x^3 - 1}$ به‌سمت صفر میل می‌کند. و این، به‌معنای آن است که منحنی، با میل x به‌سمت بی‌نهایت، به‌ترتیب به خط راست $y = x$ نزدیک‌تر و به آن شبیه‌تر می‌شود.

پیش از این، در «ریاضیات محاسبه‌ای» یادآوری کرده‌ایم که، برای این نمودار، خطهای راست $x = 1$ و $y = x$، که خود را به منحنی نزدیک می‌کنند، **خطهای مجانب** نامیده می‌شوند.

مشتق تابع (y') را محاسبه می‌کنیم:

$$y' = \frac{4x^3(x^3 - 1) - 3x^2 \cdot x^4}{(x^3 - 1)^2} = \frac{x^3(x^3 - 4)}{(x^3 - 1)^2}$$

مشتق به‌ازای $x_1 = 0$ و $x_2 = \sqrt[3]{4}$ صفر می‌شود و در این نقطه‌ها تغییر علامت می‌دهد:

اگر $x_1 < x < x_2$، آن‌وقت $y' < 0$؛

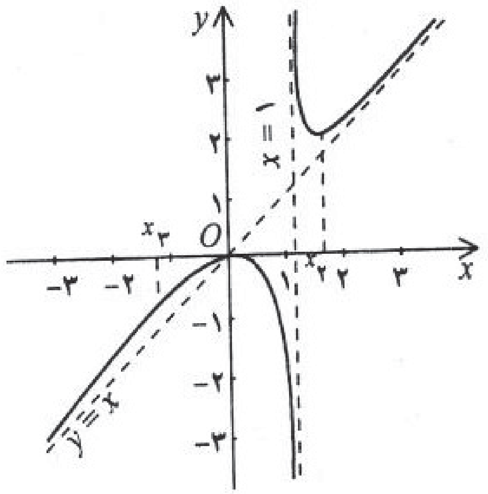
اگر $x < x_1$ یا $x > x_2$، آن‌وقت $y' > 0$.

بنابراین نقطه‌های $(0, 0)$ و $\left(\sqrt[3]{4}, \frac{4}{3}\sqrt[3]{4}\right)$ اکسترمم‌های منحنی‌اند.

مشتق دوم به‌صورت $y'' = \frac{6x^2(x^3 + 2)}{(x^3 - 1)^3}$ درمی‌آیدکه‌به‌ازای $x_1 = 0$ و $x_3 = -\sqrt[3]{2}$ برابر صفر می‌شود، ولی در نقطهٔ $x_1 = 0$ تغییرعلامت نمی‌دهد، درحالی که در نقطهٔ x_3 تغییرعلامت می‌دهد. بنابراین نقطهٔ $\left(-\sqrt[3]{2}, -\frac{2}{3}\sqrt[3]{2}\right)$، نقطهٔ عطف منحنی است.

اول جدول مقدارهای متناظر x و y و سپس منحنی تابع را رسم می‌کنیم.

x	$-\infty$		$-\sqrt[۳]{۲}$		۰	$۱-۰$	$۱+۰$			$\sqrt[۳]{۴}$		$+\infty$
y'		$+$			۰	$-$			$-$	۰	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{۲}{۳}\sqrt[۳]{۲}$	$\nearrow$	۰	$-\infty$	$+\infty$	$\nearrow$	$\searrow$	$\frac{۴}{۳}\sqrt[۳]{۴}$	$\nearrow$	$+\infty$



شکل ۳۲

یادداشت. پیش از این گفتیم، اکستره‌مم، نقطه‌ای از نمودار است که در آن‌جا y' تغییر علامت دهد، بنابراین، ریشهٔ مضاعف مشتق و یا به‌طور کلی، ریشهٔ تکراری از مرتبهٔ زوج در مشتق، معرف طول ماکزیمم یا می‌نیمم نیست. به‌همین ترتیب، ریشهٔ مضاعف y'' یا ریشهٔ تکراری از مرتبهٔ زوجِ آن، معرف طول نقطهٔ عطف نیست. در مثال ۱۴ دیدیم $x = ۰$ که ریشهٔ مضاعف y'' بود، نه نقطهٔ عطف، بلکه طول نقطهٔ ماکزیمم نمودار بود.

۵§. بیشترین و کمترین مقدار تابع (ماکزیمم و می‌نیمم مطلق)

تابع $y = f(x)$ را در بازهٔ $[a, b]$ معین، پیوسته و مشتق‌پذیر فرض می‌کنیم. بیشترین و کمترین مقدار تابع را باید بین $f(a)$، $f(b)$ و

اکسترمم‌های تابع پیدا کرد.

مثال ۱۵. می‌خواهیم ورقه‌ای مستطیلی شکل از آهن سفید با محیط برابر l بسازیم که مساحت آن بیشترین مقدار ممکن باشد.

حل. اگر طول ورقهٔ مستطیلی را x بگیریم، عرض آن برابر $\left(\frac{l}{۲} - x\right)$ می‌شود و بنابراین، مساحت آن برابر است با

$$S = x\left(\frac{l}{۲} - x\right)$$

روشن است که $\frac{۱}{۲} \leq x \leq ۰$. (در واقع برای $x = ۰$ و $x = \frac{l}{۲}$ سطحی به‌دست نمی‌آید. ۰ و $\frac{l}{۲}$ حد بُعدهای مستطیل‌اند و به‌ازای آن‌ها، به‌جای مستطیل، دو پاره‌خط راست منطبق بر هم به‌طول $\frac{l}{۲}$ به‌دست می‌آید.)

مشتق تابع $S' = \frac{l}{۲} - ۲x$، یعنی تابع در نقطه $x = \frac{l}{۴}$ به اکسترمم خود می‌رسد و داریم:

$$S\left(\frac{l}{۴}\right) = \frac{۱}{۱۶}l^۲, \quad S(۰) = S\left(\frac{l}{۲}\right) = ۰$$

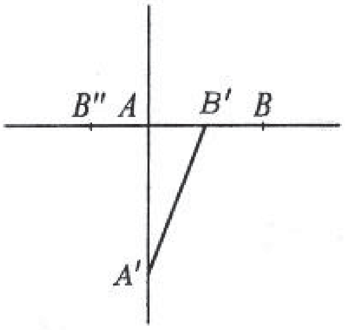
یعنی تابع به‌ازای $x = ۰$ و $x = \frac{l}{۲}$ به کمترین مقدار و به‌ازای $x = \frac{۱}{۴}l$ به بیشترین مقدار خود می‌رسد.

اگر ورقهٔ مستطیلی را به شکل مربع و به ضلع برابر $\frac{۱}{۴}l$ انتخاب کنیم، بیشترین مساحت را خواهد داشت.

مثال ۱۶. در لحظهٔ مفروض، کشتی B در ۷۵ کیلومتری شرق کشتی A است. از این لحظه به بعد، کشتی B با سرعت ۱۲ کیلومتر در ساعت به طرف غرب و کشتی A با سرعت ۴ کیلومتر در ساعت به طرف جنوب حرکت می‌کند. بعد از چه‌مدتی، دو کشتی به کمترین فاصلهٔ بین خود می‌رسند؟

حل. فرض می‌کنیم بعد از x ساعت کشتی‌های A و B به کمترین فاصلهٔ ممکنِ بین خود رسیده باشند. در این صورت کشتی B به نقطهٔ B' و کشتی A به نقطهٔ A' می‌رسد (شکل ۳۳) و فاصلهٔ بین آن‌ها به‌اندازهٔ طول پاره‌خط راست $A'B'$ می‌شود. اگر این طول را $f(x)$ بنامیم، داریم:

$$f(x) = \sqrt{(۷۵ - ۱۲x)^۲ + ۱۶x^۲} \qquad (۱)$$



شکل ۳۳

اگر گمان کنیم، کشتی B برای رسیدن به کمترین فاصلهٔ خود تا کشتی دیگر، باید از نقطهٔ A بگذرد و مثلاً در نقطهٔ B'' قرار گیرد، فاصلهٔ بین A' و B'' چنین می‌شود:

$$f(x) = \sqrt{(۱۲x - ۷۵)^۲ + ۱۶x^۲}$$

که با (۱) تفاوتی ندارد. بنابراین می‌توان برای x این بازه را در نظر گرفت:

$$۰ \leq x \leq \frac{۲۵}{۴}$$

($\frac{۲۵}{۴}$ ساعت، زمانی است که کشتی B فاصلهٔ ۷۵ کیلومتر را می‌پیماید تا به A برسد). از این‌جا

$$f'(x) = \frac{-۱۲(۷۵ - ۱۲x) + ۱۶x}{\sqrt{(۷۵ - ۱۲x)^۲ + ۱۶x^۲}} = \frac{۱۶۰x - ۹۰۰}{\sqrt{(۷۵ - ۱۲x)^۲ + ۱۶x^۲}}$$

$f'(x)$ به‌ازای $x = \frac{۴۵}{۸}$ برابر صفر می‌شود و در آن تغییر علامت می‌دهد. باید ببینیم بین $f(۰)$، $f\left(\frac{۲۵}{۴}\right)$ و $f\left(\frac{۴۵}{۸}\right)$، کدام کوچکترین است:

$$f(۰) = ۷۵, \quad f\left(\frac{۲۵}{۴}\right) = ۲۵, \quad f\left(\frac{۴۵}{۸}\right) = \frac{۱۵}{۲}\sqrt{۱۰}$$

و $\frac{۱۵}{۲}\sqrt{۱۰}$ از ۷۵ و ۲۵ کوچکتر است. بنابراین $x = \frac{۴۵}{۸}$ (ساعت).

پاسخ. فاصلهٔ این دو کشتی، ۵ ساعت و ۳۷ دقیقه و ۳۰ ثانیه بعد از حرکت آن‌ها به کمترین مقدار خود می‌رسد.

§۶. بخش‌پذیری چندجمله‌ای‌ها بر $(x-a)^n$

فرض کنید چندجمله‌ای $f(x)$ بر $(x-a)^n$ بخش‌پذیر باشد، یعنی داشته باشیم:

$$f(x) = (x-a)^n \cdot \varphi(x) \qquad (۱)$$

اگر از دو طرف برابری (۱) مشتق بگیریم، به‌دست می‌آید:

$$f'(x) = n(x-a)^{n-۱}\varphi(x) + (x-a)^n\varphi(x)$$

از آن‌جا

$$f'(x) = (x-a)^{n-۱}[\varphi(x) + (x-a)\varphi'(x)] = (x-a)^{n-۱}\varphi_۱(x) \qquad (۲)$$

یعنی اگر $f(x)$ بر $(x-a)^n$ بخش‌پذیر باشد، مشتق آن، یعنی $f'(x)$ بر $(x-a)^{n-۱}$ بخش‌پذیر است.

مثال ۱۷. در معادلهٔ درجه سوم

$$x^۳ - ۲x^۲ + x + m = ۰ \qquad (*)$$

m را طوری پیدا کنید که معادلهٔ (۱) دارای دو ریشهٔ برابر باشد. سپس، به‌ازای این مقدار m، ریشه‌های معادله را به‌دست آورید.

حل. اگر ریشهٔ مضاعف (یعنی ریشه‌های برابر) را $x_۰$ و چندجمله‌ای درجه سوم را $f(x)$ بنامیم، باید داشته باشیم:

$$f(x) = (x - x_۰)^۲(x - x_۱)$$

$x_۱$، ریشهٔ سادهٔ معادله است. بنابراین باتوجه به آن‌چه در متن درس گفتیم، باید $f'(x)$ بر $(x - x_۰)$ بخش‌پذیر باشد؛ به‌زبان دیگر، اگر معادله‌ای دارای ریشهٔ مضاعف باشد، این ریشهٔ مضاعف در معادلهٔ مشتق هم صدق می‌کند. داریم:

$$f'(x) = ۳x^۲ - ۴x + ۱$$

$f'(x) = ۰$ دو ریشه دارد: ۱ و $\frac{۱}{۳}$. معادلهٔ $(*)$ وقتی ریشهٔ مضاعف دارد که این ریشهٔ مضاعف برابر ۱ یا $\frac{۱}{۳}$ باشد:

اگر $x_۰ = ۱$، آن‌وقت با قرار دادن در معادله $(*)$ به‌دست می‌آید: $m = ۰$؛ و معادله چنین می‌شود:

$$x^۳ - ۲x^۲ + x = ۰ \Rightarrow x(x - ۱)^۲ = ۰ \qquad (*)$$

همان‌طور که می‌بینیم، در این حالت، معادلهٔ $(*)$ یک ریشهٔ $x_۱ = ۰$ و دو ریشهٔ برابر $x_۲ = x_۳ = ۱$ دارد.

اگر $x_۰ = \frac{۱}{۳}$، آن‌وقت $m = -\frac{۴}{۲۷}$ و برای معادلهٔ (۱)، به‌ترتیب داریم:

$$x^۳ - ۲x^۲ + x - \frac{۴}{۲۷} = ۰; \quad ۲۷x^۳ - ۵۴x^۲ + ۲۷x - ۴ = ۰;$$
$$(۲۷x^۳ - ۱) - ۶(۹x^۲ - ۱) + ۹(۳x - ۱) = ۰;$$

$$(3x-1)(9x^2+3x+1)-6(3x-1)(3x+1)+$$
$$+9(3x-1)=0;$$
$$(3x-1)(9x^2-15x+4)=0;\quad (3x-1)^2(3x-4)=0$$

در حالت $m=-\frac{4}{27}$، معادلهٔ $(*)$ ریشهٔ مضاعف $\frac{1}{3}$ و ریشهٔ سادهٔ $\frac{4}{3}$ را دارد.

به برابری (۲) برگردیم. از آن به‌ترتیب و پشت‌سرهم مشتق می‌گیریم:

$$\begin{aligned} f''(x) &= (x-a)^{n-2}\varphi_2(x),\\ f'''(x) &= (x-a)^{n-3}\varphi_3(x),\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\\ f^{(n-1)}(x) &= (x-a)\varphi_{n-1}(x) \end{aligned} \qquad (3)$$

از برابری (۲) و برابری‌های (۳) می‌توان نتیجهٔ جالبی گرفت:
اگر چندجمله‌ای $f(x)$ بر $(x-a)^n$ بخش‌پذیر باشد، به‌معنای آن است که $f(a)$، $f'(a)$، $f''(a)$، ...، $f^{(n-1)}(a)$ برابر صفرند، یعنی a در خود چندجمله‌ای و مشتق‌های پشت‌سرهم آن تا مرتبهٔ $(n-1)$ام به‌ازای $x=a$ برابر صفر می‌شوند.

مثال ۱۸. a، b و c را طوری پیدا کنید که عبارت

$$f(x)=x^4+ax^3-3x^2+bx+c$$

بر $(x-1)^3$ بخش‌پذیر باشد.

حل. باید داشته باشیم: $f(1)=f'(1)=f''(1)=0$. مشتق اول و دوم را محاسبه می‌کنیم:

$$f'(x)=4x^3+3ax^2-6x+b;$$

$$f''(x) = 12x^2 + 6ax - 6$$
$$f''(1) = 12 + 6a - 6 = 0 \Rightarrow a = -1;$$
$$f'(1) = 4 + 3a - 6 + b = 0 \Rightarrow b = 5;$$
$$f(1) = 1 + a - 3 + b + c = 0 \Rightarrow c = -2$$

و چندجمله‌ای به‌این صورت درمی‌آید:

$$f(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2 = (x-1)^3(x+2)$$

مثال ۱۹. ثابت کنید عبارت $f(x) = (n-1)x^n - nx^{n-1} + 1$ بر $(x-1)^2$ بخش‌پذیر است و سپس، خارج‌قسمت تقسیم را پیدا کنید.

حل. برای این‌که $f(x)$ بر $(x-1)^2$ بخش‌پذیر باشد، باید داشته باشیم:

$$f(1) = f'(1) = 0$$

مشتق $f(x)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f'(x) = n(n-1)x^{n-1} - n(n-1)x^{n-2}$$

و به‌سادگی روشن می‌شود که $f(1)$ و $f'(1)$ برابر صفرند.

برای محاسبهٔ خارج‌قسمت حاصل از تقسیم $f(x)$ بر $(x-1)^2$، به‌ترتیب داریم:

$$f(x) = (nx^n - nx^{n-1}) - (x^n - 1) =$$
$$= nx^{n-1}(x-1) - (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1) =$$
$$= (x-1)[nx^{n-1} - (x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1)] =$$
$$= (x-1)[(x^{n-1} - x^{n-2}) + (x^{n-1} - x^{n-3}) + (x^{n-1} - x^{n-4}) + \ldots$$

$$\ldots + (x^{n-1} - x) + (x^{n-1} - 1)] =$$
$$= (x-1)[x^{n-2}(x-1) + x^{n-3}(x^2-1) + \ldots$$
$$\ldots + x(x^{n-2} - 1) + (x^{n-1} - 1)] =$$
$$= (x-1)^2[x^{n-2} + x^{n-3}(x+1) + x^{n-4}(x^2+x+1) + \ldots$$
$$\ldots + x(x^{n-3} + x^{n-4} + \ldots + x + 1) + (x^{n-2} + x^{n-3} + \ldots + 1)]$$
$$= (x-1)^2[(n-1)x^{n-2} + (n-2)x^{n-3} + \ldots + 2x + 1]$$

مقدار داخل کروشه، خارج‌قسمت $f(x)$ بر $(x-1)^2$ است.

§۷. استفاده از مشتق برای رفع ابهام از کسرهای به‌صورت $\frac{0}{0}$

فرض کنید $f(a) = \varphi(a) = 0$، در این صورت کسر $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ به‌ازای $x = a$ به‌صورت $\frac{0}{0}$ درمی‌آید و مبهم است. این برابری‌ها روشن است:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{\varphi(x)-\varphi(a)} = \frac{\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\dfrac{\varphi(x)-\varphi(a)}{x-a}} \quad (x \neq a)$$

اکنون، اگر x را به‌سمت a میل دهیم، به‌دست می‌آید:

$$\underset{x\to a}{\text{حد}} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\underset{x\to a}{\text{حد}} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\underset{x\to a}{\text{حد}} \dfrac{\varphi(x)-\varphi(a)}{x-a}} = \underset{x\to a}{\text{حد}} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$$

یعنی، برای رفع ابهام از کسر به‌صورت $\frac{0}{0}$، می‌توان از حد کسر $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ وقتی $x \to a$ استفاده کرد.

این قاعده را هوپیتال ریاضی‌دان فرانسوی و شاگرد برنولی در کتاب خود مطرح کرد و به نام **قاعدهٔ هوپیتال** مشهور است.

مثال ۲۰. مطلوب است محاسبهٔ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{7}-1}{x^{10}-1}$.

حل. به‌ترتیب داریم:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^{7}-1}{x^{10}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^{7}-1)'}{(x^{10}-1)'}=\lim_{x\to 1}\frac{7x^{6}}{10x^{9}}=\frac{7}{10}$$

مثال ۲۱. مطلوب است محاسبهٔ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x-\sin 3x}{5x-\sin 5x}$

حل. داریم: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x-\sin 3x}{5x-\sin 5^{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3-3\cos 3x}{5-5\cos 5x}$. ولی کسر حاصل، بازهم به‌صورت $\frac{0}{0}$ است. یک بار دیگر از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم و چون برای بار سوم به حالت $\frac{0}{0}$ برخورد می‌کنیم، برای بار سوم از قاعدهٔ هوپیتال سود می‌جوییم:

$$\lim_{x\to 0}\frac{3-3\cos 3x}{5-5\cos 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{9\sin 3x}{25\sin 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{27\cos 3x}{125\cos 5x}=\frac{27}{125}$$

تمرین‌ها

۸۱. نمودار تابع با ضابطهٔ $y=x+\sqrt[3]{\sin x}$، در چه نقطه‌هایی مماس موازی محور $y'y$ دارد؟

۸۲. تانژانت زاویهٔ بین نمودار تابع‌های $y=-x^{2}+2$ و $y=x^{2}$ را در نقطه‌های برخورد پیدا کنید.

* ۸۳. از نقطهٔ دلخواه M روی منحنی معرف $\sqrt[3]{x^{2}}+\sqrt[3]{y^{2}}=\sqrt[3]{4}$ ، مماسی بر منحنی رسم کرده‌ایم. این مماس محور yy' را در A و محور $x'x$ را در B قطع کرده است. مطلوب است طول پاره‌خط راست AB.

* ۸۴. با چه شرطی نمودار تابع $y = x^{3} + px + q$ بر محور $x'x$ مماس است؟

۸۵. نموار تابع‌هایی را که ضابطهٔ آن‌ها داده شده است، رسم کنید:

$$
\begin{array}{ll}
1)\ y = x^{3} - 3x; & 2)\ y = x^{4} - 4x^{2} + 3; \\
3)\ y = x^{2} - 3|x| + 2; & 4)\ y = \sqrt{1 - 4x^{2}}; \\
*5)\ y = \pm x\sqrt{\dfrac{1 + x}{1 - x}}; & *6)\ y + |y| = x + |x| \\
7)\ y = \sin^{2} x - 2\sin x; & 8)\ y = 2\cos^{2} x - \cos x \\
9)\ y = \pm\sqrt{x^{2} - x^{4}} &
\end{array}
$$

۸۶. ۱) نمودار $y = x^{2} - 4\sqrt{x^{2}} + 3$ را رسم کنید.

۲) این تابع در چه فاصله‌هایی صعودی و در چه فاصله‌هایی نزولی است؟

۳) ریشه‌های معادلهٔ $y = 0$ را به‌دست آورید.

۴) مماس بر منحنی در نقطه $(0, 3)$ چه وضعی دارد؟

۵) مماس‌های بر منحنی را در نقطه‌های برخورد آن با محور $x'x$ رسم کرده‌ایم. ثابت کنید، از برخورد این مماس‌ها یک لوزی به‌دست می‌آید. مختصات راس‌های لوزی را پیدا کنید.

۸۷. نقطهٔ A به‌عرض a بر محور $y'y$ واقع است. ثابت کنید، اگر از نقطهٔ A بتوان سه مماس بر نمودار تابع $y = \dfrac{x^{3} + 2}{x}$ رسم کرد و طول‌های نقطه‌های تماس را α، β و γ بنامیم، همیشه داریم:

$$\alpha + \beta + \gamma + \alpha\beta\gamma = 4$$

* ۸۸. از نقطهٔ $M(2, -2)$ قائم‌هایی بر نمودار تابع $y = \dfrac{x - 1}{x + 1}$ رسم کرده‌ایم. معادلهٔ هریک از قائم‌ها را پیدا کنید.

۸۹. ۱) در تابع با ضابطهٔ $y=\frac{(a-1)x+8}{x^2}+\frac{b}{2(x-1)^2}$، a و b را پیدا کنید به‌شرطی که نقطهٔ $(2\,,1)$ اکسترمم آن باشد.

۲) تابع $y=\frac{8}{x^2}-\frac{1}{(x-1)^2}$ در چه بازه‌هایی صعودی و در چه بازه‌هایی نزولی است؟

۳) جهت کاوی (تقعر) منحنی نمودار را پیدا کنید.

۴) اگر بدانیم معادلهٔ $\frac{8}{x^2}-\frac{1}{(x-1)^2}=1$، ریشهٔ مضاعفی برابر ۲ دارد، ریشه‌های آن را به‌دست آورید.

۵) از نقطهٔ به‌طول ۲ واقع بر نمودار تابع مماسی بر منحنی آن رسم کرده‌ایم، معادلهٔ مماس را پیدا کنید.

۹۰. ۱) نمودار هریک از تابع‌هایی را که ضابطهٔ آن‌ها داده شده‌است، رسم کنید.

$$y=8x^5-10x^3+5x \quad (c)$$
$$y=3x^3 \quad (c')$$

۲) آیا این نمودارها مرکز تقارن دارند؟ آیا مرکز تقارن دو نمودار یکی است؟

۳) از نقطهٔ A به‌طول ۱ مماسی بر نمودار (c') رسم کرده‌ایم، معادلهٔ مماس را پیدا کنید. A روی منحنی (c') است.

۴) از نقطهٔ A به‌طول ۱ واقع بر منحنی (c') خط راستی گذرانده‌ایم. این خط راست در برخی حالت‌ها نمودار (c') را در دو نقطهٔ دیگر B و C قطع می‌کند. مکان هندسی نقطهٔ M وسط پاره‌خط راست BC را پیدا کنید.

۹۱. a، b و c سه عدد حقیقی مختلف‌اند. ثابت کنید نمودار تابع با ضابطهٔ

$$y=(x-a)(x-b)(x-c)$$

همیشه یک ماکزیمم و یک می‌نیمم دارد. در حالت‌های $a=b\neq c$ یا $a=b=c$ چه وضعی پیش می‌آید؟

* ۹۲. ثابت کنید نمودار تابع با ضابطهٔ $y=\frac{x^{2}+2x-3}{x^{2}-2x+3}$ سه نقطهٔ عطف دارد که روی یک خط راست‌اند.

۹۳. x_1 و x_2 را طول‌ها و y_1 و y_2 را عرض‌های نقطه‌های ماکزیمم و می‌نیمم نمودار تابع با ضابطهٔ $y=\frac{x^{2}+ax+b}{x^{2}-2x}$ می‌گیریم. a و b را طوری پیدا کنید که داشته‌باشیم:

$$\begin{cases} 2(x_1+x_2)+y_1y_2=19 \\ y_1+y_2+2x_1x_2=16 \end{cases}$$

* ۹۴. ثابت کنید، نمودار تابع $y=\frac{2x^{2}+m^{2}}{x-2m}$، به‌ازای همهٔ مقدارهای $m\neq 0$، بر دو خط ثابت مماس است. معادله این دو خط راست را پیدا کنید.

۹۵. از نقطهٔ A دو مماس بر سهمی $y=x^{2}-2x$ رسم کرده‌ایم. اگر این دو مماس بر هم عمود باشند، مکان هندسی نقطهٔ M را پیدا کنید.

۹۶. این حدها را محاسبه کنید:

$$1)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt[3]{\tan x}-1}{2\sin^{2} x-1};$$

$$2)\ \lim_{x\to 0} \frac{3\tan 4x-12\tan x}{3\sin 4x-12\sin x}$$

$$3)\ \lim_{x\to\sqrt{3}} \frac{x^{4}-5x^{3}+7x^{2}+15x-30}{2x^{4}+x^{3}-3x^{2}-3x-9},$$

$$4)\ \lim_{x\to 0} \frac{\sin(a+x)\sin(a+2x)-\sin^{2} a}{x};$$

۵) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cot(a+2x)-2\cot(a+x)+\cot a}{x^2}$;

۶) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(a+2x)-2\sin(a+x)+\sin a}{x^2}$;

۷) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin mx-\cos mx}$;

۸) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos x-\cos 3x}{x^2}$

۹) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[n]{1+\alpha x}\cdot\sqrt[m]{1+\beta x}-1}{x}$

۹۷. می‌خواهیم زمینی مستطیل شکل با محیط برابر $2m$ متر طوری انتخاب کنیم که بیشترین مساحت را داشته باشد.

* ۹۸. به‌ازای چه مقدارهایی از x و y، این عبارت کمترین مقدار را دارد:

$$A = 5x^2 + 9y^2 - 12xy - 6x + 14$$

۹۹. به‌کمک مقوایی مربع شکل با ضلع به‌طول ۱۲۰ سانتی‌متر جعبه‌ای مکعب مستطیل شکل و روباز ساخته‌ایم. ارتفاع جعبه چند سانتی‌متر باشد تا حجم آن بیشترین مقدار ممکن باشد؟

۱۰۰. از بین استوانه‌های قائم با سطح کل برابر S، حجم کدام‌یک از همه بیشتر است؟

* ۱۰۱. ظرفی مکعب مستطیل شکل ساخته‌ایم که قاعدهٔ آن، طول و عرضی به نسبت ۲ : ۱ دارد. می‌دانیم جنسی که برای هر واحد مربع قاعده به‌کار می‌رود، به‌اندازهٔ $\frac{1}{3}$ قیمت هر واحد مربع دیواره‌های ظرف ارزش دارد. اگر حجم ظرف را V فرض کنیم، ارتفاع ظرف چقدر باشد، تا ظرف با کمترین هزینه ساخته شود؟

* §۵. اندکی دربارهٔ پیدایش ریاضیات با کمیت‌های متغیر در اروپای غربی

۱. مسیر کلی پیشرفت ریاضیات در سدهٔ هفدهم

سده‌های پانزدهم و شانزدهم، در اروپای غربی، دوران زوال فئودالیسم و رونق سرمایه‌داری تجاری است. در این دوران، به‌تدریج تولید دستی که به‌وسیلهٔ پیشه‌وران و صنعت‌کاران جداگانه انجام می‌شد، به تولید کارگاهی تغییر شکل می‌داد. تلاش سرمایه‌داری تجاری، برای به‌دست آوردن بازارهای تازه، کشتی‌ها را در دورترین مسیرها به حرکت انداخت. اخترشناسی و جغرافیا تکامل یافت. همه‌جا به محاسبه‌های دقیق نیاز پیدا کردند که خود موجب پیشرفت لگاریتم و مثلثات شد.

سدهٔ هجدهم، بشارت تازه‌ای داشت: در تولید ، اول سازوکارهای ساده‌ای پدید آمد و سپس، ماشین‌های پیچیده‌تری وارد صحنه شد؛ صنعت از روش‌های کارگاهی تولید آزاد شد و به‌سمتی چرخید که تولید را بر اساس ماشین قرار دهد. تکامل نیروهای تولید، به‌نوبهٔ خود، بر روابط تولیدی اثر گذاشت و آن را تکامل داد. سرمایهٔ صنعتی پدید آمد و، درنتیجه، سرمایه‌داری صنعتی به‌تدریج متوجه شد که باید تولید صنعتی را به‌دست بگیرد و بر

سازوکار آن مسلط شود. ریاضیات، در برابر مساله‌ها و خواست‌های تازه‌ای قرار گرفت. دیگر ریاضیات مقدماتی نمی‌توانست پاسخ‌گوی صنعت روبه‌رشد باشد. حرکت در تولید و صنعت انگیزه‌ای برای حرکت ریاضیات شد. روش‌های تازه و شاخه‌های تازه‌ای در دانش پدید آمد که بازتاب‌دهندهٔ این حرکت بود. جبر و روش‌های جبری بیش از پیش در هندسه نفوذ کرد، و بررسی مقدارهای بی‌نهایت کوچک از آنالیز سر درآورد و به‌تدریج جای پای خود را محکم کرد. روش‌های تازه، میدان کاربرد ریاضیات را، در شناخت طبیعت و دشواری‌های زندگی، بسیار گسترش داد و، همراه با آن، پایه‌های خود را مستحکم‌تر کرد و کم‌کم اساس ریاضیات جدید را به‌وجود آورد.

در همین زمان و همراه با این پیشرفت، در ریاضیات مقدماتی دگرگونی عمیقی رخ داد. اندیشهٔ خلاق ریاضی‌دانان به‌سمت بررسی پایه‌های آن معطوف شد. نظریهٔ عددها و آنالیز ترکیبی شکوفا شد، و براساس آنالیز ترکیبی، نظریهٔ احتمال پدید آمد.

تصورهای نخستین دربارهٔ اندیشه‌های تازه در ریاضیات، هنوز نتوانسته بود قالب خود را بیابد. همان قالب‌های کهن ارائه می‌شد، ولی به‌تدریج این قالب‌ها شکسته شد، تغییر کرد و در کنار آن‌ها اندیشه‌های تازه‌ای پدید آمد که زیر تاثیر نیازهای زندگی بود و، به‌همین مناسبت، دگرگونی جدی و ریشه‌ای در دانش پدیدار شد که در واقع، نتیجه‌ای از دگرگونی ریشه‌ای در تولید بود.

اندیشه‌های تازه در ریاضیات، در آغاز به‌طور گسترده در فرانسه گسترش یافت و سپس به سایر کشورهای اروپای غربی نفوذ کرد. کارهای **فرانسوا ویت** و فعالیت‌های **باش دِمِزی‌ریاک** به‌همین دوران گذرا تعلق دارد؛ ولی بعد، اندیشه‌های تازه را دانشمندانی چون **کپلر**، **فرما**، **کاوالیری**، **پاسکال** و بسیاری از دانشمندان دیگر جذب کردند که سرانجام منجر به دستگاه‌های علمی پایدار و منظم **دکارت**، **لایب‌نیتس** و **نیوتون** شد و هندسه تحلیلی و آنالیز ریاضی شکل گرفت.

گاسپارباش دِمِزی‌ریاک (۱۵۸۷ـ۱۶۳۸ میلادی) در شهر فرانسوی «بورک‌ـآن‌ـگِرِس» به دنیا آمد. او که آموزش خوبی به‌ویژه در رشتهٔ ادبیات دیده بود و بر بسیاری از زبان‌ها مسلط بود، در سال ۱۶۳۵ میلادی عضو فرهنگستان تازه تاسیس علومِ فرانسه شد. باش شعر می‌سرود و شاعری نه‌چندان بد، به‌حساب می‌آمد، ولی علاقهٔ او به شعر، نتوانست مانع علاقهٔ پرشور او به ریاضیات بشود. او بیش از همه، به مساله‌های مربوط به نظریهٔ عددها کشش داشت. در سال ۱۶۲۱، «حساب» دیوفانت را به زبان‌های لاتینی و یونانی منتشر کرد. باش، در واقع، این کتاب را تغییر داد و تکمیل کرد؛ کتاب «حساب» و تفسیرهای باش، تاثیری جدی در بالا بردن علاقه به مساله‌های نظریهٔ عددها داشت.

خود مزی‌ریاک هم به این مساله‌ها علاقه داشت؛ به‌عنوان نمونه، این قضیه از اوست. هر عدد طبیعی بزرگتر از ۳ را می‌توان به مجموع چهار مجذور کامل تبدیل کرد. این قضیه، حالت خاصی از مسالهٔ «وارینگ» است که بعدها در سال ۱۷۷۰ به‌وسیلهٔ **وازینگ** ریاضی‌دان انگلیسی (۱۷۳۴ـ۱۷۹۸ میلادی) طرح شد: ثابت کنید هر عدد طبیعی N را می‌توان به‌صورت مجموعی از مجذورهای کامل که تعداد آن‌ها از ۴ تجاوز نکند، نشان داد، مثل

$$
\begin{aligned}
۱۱ &= ۳^۲ + ۱^۲ + ۱^۲, \\
۲۹ &= ۵^۲ + ۲^۲, \\
۵۵ &= ۷^۲ + ۲^۲ + ۱^۲ + ۱^۲, \\
۲۸۶ &= ۱۶^۲ + ۵^۲ + ۲^۱ + ۱^۲
\end{aligned}
$$

در سال‌های اخیر ثابت شد، هر عدد طبیعی را می‌توان حداکثر با هشت مکعب، یا حداکثر با هفده توان چهارم و غیره نشان داد. ولی این قضیه را در حالت کلی **وینتوگرادوف** ریاضی‌دان شوروی ثابت کرد و، درضمن، ارزیابی

دقیقی از تعداد جمله‌ها به‌دست آورد. مرز تعداد جمله‌ها با این رابطه بیان می‌شود:

$$n[۳\ln(n) + ۱۱]$$

مزی‌ریاک در سال ۱۶۱۲، کتاب بسیار ساده و جالبی دربارهٔ سرگرمی‌های ریاضی منتشر کرد که حتا در سدهٔ نوزدهم هم تجدید چاپ شد. در این کتاب، مساله‌های سرگرم‌کننده‌ای که در نوشته‌های ریاضی‌دانان پیشین دیده می‌شد، و هم مساله‌های تازه‌ای، جمع‌آوری شده بود. مزی‌ریاک، به‌عنوان یک ریاضی‌دان، توانسته بود بخش‌بندی منظم و جالبی در مساله‌ها انجام و بسیاری از آن‌ها را تعمیم دهد و راه‌حل‌های کلی برای آن‌ها پیدا کند.

برخی از مساله‌ها، به هیچ روش خاصی برای حل نیاز نداشتند و نوعی طنز و شوخی به‌حساب می‌آمدند، ولی بعضی دیگر، برعکس، نیازمند روش‌ها و راه‌حل‌های خاص ریاضی بودند: در کتاب به مساله‌های مربوط به بخش‌پذیری، معادله‌ها و دستگاه‌های سیال هم برمی‌خوریم. در این‌جا چند نمونه از مساله‌های مزی‌ریاک را می‌آوریم.

۱. زن فقیری به بازار می‌رفت تا تخم‌مرغ‌های خود را بفروشد. یکی به او تنه زد، طوری که سبد زن افتاد و تخم‌مرغ‌ها شکست. گناه‌کار می‌خواست زیانی را که وارد کرده‌بود، جبران کند؛ از زن پرسید، چند تخم‌مرغ در سبد بود؟ زن نتوانست تعداد تخم‌مرغ‌ها را به یاد آورد، ولی گفت همین‌قدر می‌دانم، وقتی تخم‌مرغ‌ها را دوتادوتا، یا سه‌تاسه‌تا، یا چهارتاچهارتا یا پنج‌تاپنج‌تا یا شش‌تاشش‌تا می‌چیدم، هر بار یک تخم‌مرغ اضافی می‌آمد، ولی وقتی آن‌ها را هفت‌تا هفت‌تا چیدم، چیزی باقی نماند. او چند تخم‌مرغ داشته است؟

۲. کسی مُرد و پول ارثیهٔ او را بین فرزندانش تقسیم کردند. اولی ۱ تالر به‌اضافهٔ $\frac{۱}{۷}$ بقیهٔ پول‌ها، دومی ۲ تالر به‌اضافهٔ $\frac{۱}{۷}$ بقیه پول‌ها، سومی ۳ تالر

به‌اضافهٔ $\frac{۱}{۷}$ باقی‌ماندهٔ پول‌ها را برداشت و غیره. معلوم شد سهم همهٔ فرزندان با هم برابر شده است. چقدر پول از این مرد باقی مانده بود و چند فرزند داشت؟

۳. دونفر یک ظرف ۸ لیتری پر از شیر داشتند. آن‌ها می‌خواستند شیر را به‌طور برابر بین خود تقسیم کنند. برای این منظور دو ظرف خالی، یکی با گنجایش ۳ لیتر و دیگری با گنجایش ۵ لیتر در اختیار داشتند. چگونه عمل کنند؟

۴. سه مرد حسود می‌خواستند با همسرانشان از عرض یک رودخانه عبور کنند. آن‌ها تنها یک قایق کوچک در اختیار داشتند که دونفر می‌توانستند در آن جا بگیرند. چگونه از رودخانه عبور کنند که هرگز هیچ زنی در غیاب شوهر خود با یک یا دو مرد دیگر نباشد؟

مسالهٔ آخر را به‌صورت دیگری، در کتاب آلکوئین ریاضی‌دان (از قوم آنگلوساکسون که در حدود ۵۳۵ تا ۴۰۴ میلادی زندگی می‌کرد) هم آمده است.

«مربع‌های وفقی» در کتاب مزی‌ریاک، جای نمایانی دارد. در زمان مزی‌ریاک، کار با مربع‌های وفقی جزو سرگرمی‌های همگانی به‌شمار می‌رفت. در این‌جا دو نمونه از مربع‌های وفقی (یکی ۳×۳ و دیگری ۷×۷) را می‌آوریم:

۳۰	۳۹	۴۸	۱	۱۰	۱۹	۲۸
۳۸	۴۷	۷	۹	۱۸	۲۷	۲۹
۴۶	۶	۸	۱۷	۲۶	۳۵	۳۷
۵	۱۴	۱۶	۲۵	۳۴	۳۶	۴۵
۱۳	۱۵	۲۴	۳۷	۴۲	۴۴	۴
۲۱	۲۳	۳۲	۴۱	۴۳	۳	۱۲
۲۲	۳۱	۴۰	۴۹	۲	۱۱	۲۰

۴	۳	۸
۹	۵	۱
۲	۷	۶

در این آخرها، مربع‌های وفقی، جنبهٔ خالص نظری پیدا کردند، زیرا روشن شد که نظریهٔ مربع‌های وفقی، در حل دستگاه‌های معادله‌ها کاربرد دارد.

علاقهٔ مزی‌ریاک به نظریهٔ عددها در کارهای پیرفرما ریاضی‌دان فرانسوی سدهٔ هفدهم بازتاب یافت.

پیرفرما (۱۶۰۱ـ۱۶۶۵) فرزند یک تاجر پوست؛ درس حقوق خواند و در آغاز به‌عنوان وکیل مدافع به‌کار پرداخت؛ ولی بعد مشاور مجلس شد که تا پایان زندگی خود آن را حفظ کرد. کار فرما، هیچ ربطی به ریاضیات نداشت و این، از شگفتی‌هاست که او از همهٔ وقت آزاد خود برای بررسی‌های ریاضی استفاده می‌کرد. او به‌خاطر همین علاقهٔ خود موفقیت‌های زیادی در شاخه‌های مختلف ریاضی به‌دست آورد. فرما به فیزیک هم علاقه داشت و به‌عنوان نمونه، اصل اُپتیک هندسی را، که امروز به‌نام اصل فرما معروف است، تنظیم کرد.

فرما نه‌تنها در زمینه‌هایی از ریاضیات که در زمان او شناخته شده‌بود، نتیجه‌گیری‌های تازه‌ای به‌دست آورد، بلکه در زمینه‌های تازه‌ای هم کار کرد: آنالیز ریاضی، هندسهٔ تحلیلی و نظریهٔ احتمال. همچنین او را باید آفرینندهٔ نظریهٔ عددها، به‌عنوان یک دانش مستقل دانست.

فرما دربارهٔ مربع‌های وفقی هم، بررسی‌های زیادی دارد. مربع‌های وفقی را، ایرانی‌ها و هندی‌ها هم می‌شناختند و از آن‌ها بود که در سده‌های میانه، به اروپای غربی راه یافت. مربع‌های وفقی را، به‌دلیل ویژگی‌هایی که داشت، مربع‌های جادویی هم می‌گفتند. و اغلب به‌جای «طلسم» و برای معالجه بیماری‌ها از آن استفاده می‌کردند. ولی ریاضی‌دانان با چشم دیگری به این مربع‌ها نگاه می‌کردند. آن‌ها به ساختمان ریاضی این مربع‌ها علاقه‌مند بودند و بررسی‌های آن‌ها، در زمینهٔ روش ساختن این مربع‌ها، موجب پیشرفت برخی از نظریه‌های ریاضی شد. حتا مزی‌ریاک توانست روش ساختن مربع‌های

وفقی را، که تعداد خانه‌های آن‌ها فرد باشد، پیدا کند. فرما، اندیشهٔ تشکیل مربع‌های وفقی را به فضا گسترش داد، یعنی مکعب‌هایی را مطرح کرد که ویژگی‌هایی شبیه مربع‌های وفقی داشته باشند.

فرما، با پرداختن به موضوع بخش‌پذیری عددها، راه‌حل جالبی برای تجزیه یک عدد به ضرب دو عدد طبیعی پیدا کرد. روش فرما، برای حالت‌هایی که تجزیهٔ عدد طبیعی دشوار به‌نظر می‌رسد، بسیار سودمند است.

فرض کنیم بخواهیم، عدد طبیعی A را به‌ضرب دو عامل تجزیه کنیم. عدد طبیعی a را کوچکترین عددی می‌گیریم که مجذور آن از A بزرگتر باشد. در این صورت $A = a^۲ - k$. اگر k، به‌نوبهٔ خود، مجذور یک عدد طبیعی باشد، یعنی $k = b^۲$، آن‌وقت تجزیهٔ عدد A روشن است:

$$A = a^۲ - b^۲ = (a + b)(a - b)$$

در حالتی که k مجذور کامل نباشد، به‌جای a، عدد $a + ۱$ را انتخاب می‌کنیم: $A = (a + ۱)^۲ - k_۱$. اگر $k_۱$ مجذور یک عدد طبیعی باشد، تجزیه انجام می‌شود، در غیر این صورت به‌جای a عدد $a + ۲$ و در صورت نیاز $a + ۳$، $a + ۴$ و غیره را انتخاب می‌کنیم تا به نتیجه برسیم. مثال:

$$۵۸۹ = ۲۵^۲ - ۳۶ = ۲۵^۲ - ۶^۲ = ۳۱ \times ۱۹,$$
$$۷۰۳ = ۲۷^۲ - ۲۶ = ۲۸^۲ - ۹^۲ = ۳۷ \times ۱۹$$

فرما در نظریهٔ عددها، یک رشته نتیجهٔ باارزش به‌دست آورد. تنها چند نمونه از این نتیجه‌ها را نام می‌بریم.

او ثابت کرد، هر عدد اول به‌صورت $۴n + ۱$ را می‌توان به‌صورت مجموع مجذورهای دو عدد نوشت.

بیش از همه، «قضیهٔ بزرگ فرما» و «قضیهٔ کوچک فرما» مشهور شده است.

فرما، قضیهٔ بزرگ خود را، ضمن مطالعهٔ کتاب «حساب» دیوفانت اثر مزی‌ریاک مطرح کرد. فرما در حاشیهٔ این کتاب و در کنار جایی که معادلهٔ $x^۲ + y^۲ = z^۲$ آمده بود، نوشت: «درضمن، نمی‌توان یک مکعب را به مجموع دو مکعب، یک توان چهارم را به مجموع دو توان چهارم و، به‌طور کلی، یک توان را به مجموع دو توان با همان نما، تبدیل کرد. من در واقع، اثبات مهیجی برای این گزاره پیدا کرده‌ام، ولی در این‌جا، به‌دلیل کمبود جا نمی‌توانم آن را مطرح کنم». این قضیهٔ فرما، امروز به‌این صورت مطرح می‌شود: «اگر x و y و z عددهایی گویا و n عددی طبیعی باشد، معادلهٔ $x^n + y^n = z^n$ برای $n > ۲$ جواب ندارد». با این‌که بسیاری از ریاضی‌دانان بزرگ بعد از فرما، تلاش کردند این حکم را در حالت کلی ثابت کنند، به نتیجه نرسیدند، اگرچه در حالت‌های خاص زیادی، درستی حکم فرما ثابت شد. البته، در سال‌های اخیر، قضیهٔ فرما، به‌وسیلهٔ یک ریاضی‌دان انگلیسی مقیم امریکا، به‌صورتی مفصل و غیرمستقیم ثابت شد.

قضیهٔ کوچک فرما حاکی است از: «اگر p عددی اول و a عددی طبیعی بخش‌ناپذیر بر p باشد، آن‌وقت عدد $a^{p-۱} - ۱$ بر p بخش‌پذیر است: $۲^۶ - ۱$ بر ۷، $۲^۲ - ۱$ بر ۳ بخش‌پذیر است و غیره.

مهم‌ترین کار فرما در زمینهٔ جبر، به نظریهٔ «آنالیز ترکیبی» مربوط می‌شود. یونانی‌ها و هندی‌ها هم در این زمینه کار کرده‌بودند، ولی طرح علمی این نظریه در سدهٔ هفدهم میلادی، در کارهای فرما و فیلسوف، فیزیک‌دان و ریاضی‌دانِ دیگر فرانسوی، پاسکال پی ریخته شد. این دو دانشمند، به‌جز نظریهٔ آنالیز ترکیبی، نظریهٔ احتمال را هم، که شاخهٔ تازه‌ای از ریاضیات بود، به‌وجود آوردند.

نخستین مساله‌های مربوط به نظریهٔ احتمال، در سدهٔ شانزدهم میلادی پدید آمد. نظریهٔ احتمال در رابطه با بیمه و قمار مطرح شد. در این زمینه، به‌ویژهٔ، تاسِ بازی (مکعبی استخوانی که روی وجه‌های آن عددهای از ۱ تا ۶

نقش شده است) نظر ریاضی‌دانان را به خود جلب کرد. فرما و پاسکال مبانی نظریهٔ احتمال را بنیان ریختند و مفهوم «انتظار ریاضی» را وارد در اصطلاح‌های ریاضیات کردند. آن‌ها احتمال وقوع یک پیش‌آمد را، نسبت تعداد پیش‌آمدهای مساعد با تعداد پیش‌آمدهای ممکن دانستند. به‌عنوان نمونه، وقتی دو تاسِ بازی را با هم بیندازیم، احتمال آمدن خال‌هایی با مجموع ۷، برابر $\frac{۱}{۶}$ و احتمال آمدن خال‌هایی با مجموع ۳، برابر $\frac{۱}{۱۸}$ است.

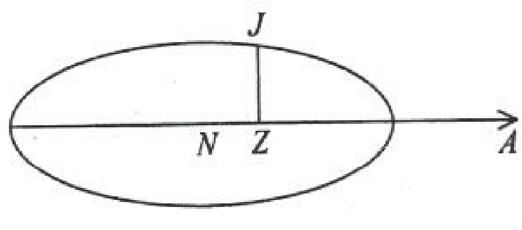
مساله‌ای که انگیزه‌ای برای تولد نظریهٔ احتمال شد، چنین است: دِمِره نامی، از دوستان پاسکال، با این پرسش به او مراجعه کرد: مبلغی پول را چگونه و با چه نسبتی تقسیم کند که درست و عادلانه باشد، با این شرط‌ها: دو نفر با مکعب‌ها بازی می‌کنند. قرار گذاشته‌اند کسی که قبل از دیگری به تعداد معینی بُرد دست یابد، مبلغ را به او بدهند. ولی به‌دلیل محدود بودن تعداد بازی‌ها برنده‌ای پیدا نشد. اولی در پایان بازی یک امتیاز و دومی دو امتیاز کم داشت. بنابر راه‌حل پاسکال، باید $\frac{۳}{۴}$ پول را به اولی و $\frac{۱}{۴}$ آن را به دومی داد. استدلال پاسکال چنین بود: در هر حال، نصف پول حق اولی است، زیرا اگر دومی دور بعدی بازی را هم می‌برد، آن‌وقت پول به دو بخش برابر تقسیم می‌شد؛ ولی به اولی یک‌چهارم پول اضافه می‌رسد، زیرا هر دو بازی‌کن دربارهٔ نصف بقیهٔ پول، حقی برابر دارند. راه‌حل پاسکال را به فرما دادند و او این مساله را به‌یاری آنالیز ترکیبی حل کرد و همان جواب را به‌دست آورد.

نظریهٔ احتمال که پایه‌های آن به‌وسیلهٔ فرما و پاسکال گذاشته شده‌بود، در سدهٔ هجدهم پیشرفت بسیار کرد و اساس نظری آن به‌وجود آمد. درضمن، نظریهٔ احتمال کاربردهای زیادی، چه در دانش‌ها و چه در فعالیت‌های عملی پیدا کرد. آغاز کاربرد نظریهٔ احتمال در صنعت بیمه بود، ولی بعد چنان کاربردهایی به‌دست آورد که در همهٔ جنبه‌های دانش و زندگی نفوذ کرد.

کارهای فرما، برای تکامل هندسهٔ تحلیلی ارزش زیادی دارد. در نوشتهٔ خود به نام «مقدمه‌ای بر آموزش مکان‌های مسطح و فضایی» که به‌وسیلهٔ پسر او و بعد از مرگ فرما چاپ شد، به‌صورتی روشن و دقیق، مسالهٔ بیان معادله‌ها را به‌یاری هندسه مطرح کرده است. فرما می‌گوید: به‌کمک دو پاره‌خط راست که بهتر است بر هم عمود باشند و نقطهٔ برخورد آن‌ها، به‌عنوان مبداء محاسبه در نظر گرفته شود، می‌توان معادله را به زبان هندسه بیان کرد. او مبداء مختصات را N، محور طول را A و محور عرض را E می‌نامد و با انتخاب مقدارهای ثابت با حرف‌های B، D و g، معادلهٔ خط راستی را که از مبداء می‌گذرد و معادلهٔ سهمی و دایره را این‌طور به‌دست می‌آورد:

$$D \cdot A = B \cdot E \text{ و } A^{۲} = D \cdot E \text{ و } B^{۲} + A^{۲} = E^{۲}$$

باید یادآور شد که شکل نوشتاری فرما، دربارهٔ معادله‌ها، تا حد زیادی با هم‌عصران او تفاوت دارد. به‌عنوان نمونه، فرما $A^{۲}$ را به‌شکل A_q می‌نویسد که در آن، q، حرف اول واژهٔ quadratum لاتینی به‌معنی مربع است. در واقع، فرما معادلهٔ خط راست را این‌طور می‌نوشت: «D روی A برابر است با B روی E»، و معادلهٔ بیضی به‌این صورت بیان می‌شود: «اگر $Bq - Aq$ نسبت مفروضی با Eq داشته باشد، آن‌وقت نقطهٔ J روی محیط بیضی است». این بیان با شکل هم همراه است (شکل ۳۴).



شکل ۳۴

به‌این ترتیب، در کارهای فرما، همهٔ آن‌چه را که برای بیان معادله‌های

جبری به‌کمک هندسه لازم است، یعنی خط‌های اصلی هندسهٔ تحلیلی را می‌توان دید. تنها این مطلب را باید یادآوری کرد که فرما، تنها با یک محور (محور طول) کار می‌کند و مبداء را روی آن در نظر می‌گیرد و به‌یاری همین یک محور، محاسبه‌ها را انجام می‌دهد. فرما به‌جای محور عرض، فاصلهٔ نقطه با محور طول، یا در جهت عمود بر آن و یا به‌صورت مایل، در نظر می‌گیرد، یعنی فرما هم از دستگاه مختصات قائم استفاده می‌کرد و هم از دستگاه مختصات مایل. مختصات منفی، در کارهای فرما دیده نمی‌شود. باوجود این، او معادلهٔ دایره یا بیضی را، با مرکز در مبداء مختصات انتخاب می‌کند و محور بزرگتر بیضی را منطبق بر محور طول می‌گیرد، گرچه بر محیط این‌گونه دایره یا بیضی، نقطه‌های با مختصات منفی وجود دارد. اگر دو معادلهٔ دومجهولی[1]، تنها در ضریب‌های ثابت متفاوت بودند، فرما آن‌ها را نمایندهٔ منحنی با خصلت‌های مشابه می‌دانست.

به‌احتمالی، کارهای فرما در زمینهٔ هندسه تحلیلی، دست‌کمی از کارهای دکارت (که او را آفرینندهٔ هندسهٔ تحلیلی می‌شناسند) نداشت، ولی همان‌طور که گفتیم، نوشته‌های فرما بعد از مرگ او و به‌یاری پسرش منتشر شد و، به‌همین مناسبت، کارهای دکارت اعتبار بیشتری پیدا کرد.

بر سر کارهای فرما در زمینهٔ آنالیز ریاضی هم، همین بلیه آمد: این نوشته‌ها وقتی به‌دست مردم رسید که خود فرما مرده بود. ازجملهٔ این کارها، برای مثال، «روش‌های بررسی بیشترین و کمترین مقدارها (ماکزیمم و می‌نیمم)» و کار مربوط به محاسبهٔ مساحت سطح قطعه هذلولی رامی‌توان نام برد. فرما در نوشته‌های خود، روش تعیین مماس بر منحنی مسطحه و روش‌های انتگرال‌گیری از برخی تابع‌های ساده را می‌دهد. روش او را، برای تعیین مقدارهای اکسترممم تابع، به زبان امروزی می‌توان به‌این ترتیب بیان کرد. برای

---

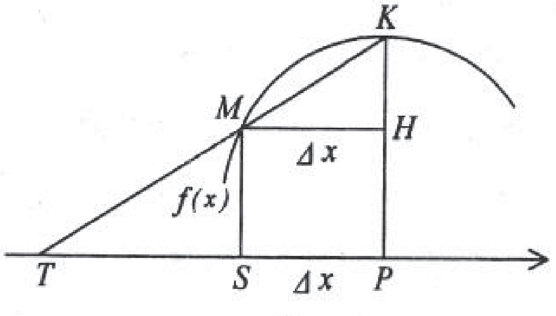
۱. در زمان فرما، هنوز اصطلاح «کمیت متغیر» به‌کار نمی‌رفت و، به‌جای آن، گفته می‌شد «کمیت مجهول».

پیدا کردن مقدار اکسترمم تابع $f(x)$، برای متغیر نمو E را در نظر می‌گیریم و این معادله را تشکیل می‌دهیم:

$$\frac{f(x+E)-f(x)}{E}=0$$

بعد از تقسیم بر E، فرض می‌کنیم $E=0$. در این صورت، معادله‌ای که به‌دست می‌آید، مقداری از متغیر را به ما می‌دهد که به‌ازای آن، تابع به مقدار اکسترمم خود می‌رسد. همان‌طور که می‌بینیم، وقتی E به‌سمت صفر میل می‌کند سمت چپ معادله، مشتق تابع $f(x)$ می‌شود و، بنابراین، با صفر قرار دادن مشتق طول نقطهٔ اکسترمم به‌دست می‌آید.

فرما از روش خود برای حل بسیاری از مساله‌های هندسی استفاده می‌کند؛ ازجمله برای مسالهٔ تعیین مخروط با بیشترین حجم و استوانهٔ با بیشترین سطح، وقتی در یک کرهٔ مفروض محاط شده‌باشند؛ همچنین برای ساختن مماس بر یک منحنی. خط کلی استدلال فرما برای ساختن مماس بر منحنی را، می‌توان به‌این ترتیب بیان کرد: به زبان امروزی، فرض می‌کنیم نمودار $y=f(x)$ را رسم کرده‌باشیم (شکل ۳۵). اگر بخواهیم از نقطهٔ M مماسی بر این منحنی رسم کنیم، در آغاز قاطع MTK را می‌سازیم که در آن، T نقطهٔ برخورد قاطع با محور طول است؛ سپس عمودهای MS و KP را بر محور طول و از M خط راستی موازی محور طول تا برخورد در نقطهٔ H با خط راست KP رسم می‌کنیم.



شکل ۳۵

باتوجه به تشابه مثلث‌های MTS و KMH، به‌دست می‌آید:

$$|TS| : |MS| = |MH| : |KH|$$

از آن‌جا

$$|TS| = \frac{|MS| \cdot |MH|}{|KH|} \Rightarrow |TS| = \frac{f(x) \cdot \Delta x}{f(x+\Delta x) - f(x)}$$

اگر Δx به‌سمت صفر میل کند، $|TS|$ به‌سمت تحت مماس میل می‌کند و برابر $\frac{f(x)}{f'(x)}$ می‌شود. با در دست داشتن نقطهٔ M و مقدار تحت مماس، می‌توان به‌سادگی خط راست مماس را رسم کرد.

می‌بینیم، فرما بری حل این‌گونه مساله‌ها، از مثلث KMH استفاده می‌کند که ضلع‌های مجاور به زاویهٔ قائمهٔ آن، نموهای متغیر و تابع‌اند. این مثلث برای تکامل بعدی آنالیز ریاضی، اهمیت زیادی دارد؛ دیگر ریاضی‌دانان هم‌عصر فرما، ازجمله پاسکال هم، از این مثلث استفاده کرده‌اند. بعدها، لایب‌نیتس، این مثلث را، **مثلث مفسر** نامید.

فرما، بعد از حل مساله‌های مربوط به ماکزیمم و می‌نیمم و رسم مماس، به مساله‌هایی می‌پردازد که بعدها به‌عنوان جدیدترین مساله‌های محاسبهٔ دیفرانسیلی به‌شمار رفت. باوجود این، این‌ها همهٔ آن چیزهایی نیست که فرما در زمینهٔ آنالیز ریاضی بررسی کرده است. فرما با طرح و حل مسالهٔ محاسبهٔ مساحت‌های محدود به منحنی‌ها، روش‌هایی را به‌کار می‌برد که به محاسبهٔ انتگرالی بسیار نزدیک است.

به‌عنوان نمونه، فرما برای منحنی «سهمی مانند» $x^p = y^q$، سطحی را، که بین منحنی تابع $y = x^{\frac{p}{q}}$، دو خط عمود بر محور طول و خود محور قرار دارد، شبیه آن‌چه امروز برای انتگرال‌گیری انجام می‌دهیم، تقسیم می‌کند، ولی این سطح‌ها را با قانون معینی می‌سازد: عرض‌ها، برای نقطه‌های متناظر

با طول‌های x، αx، $\alpha^{۲}x$، $\alpha^{۳}x$ و غیره رسم می‌شوند؛ درضمن α عددی کوچکتر از واحد است. با این ساختمان، طول نقطه‌ها، به‌ترتیب کوچک می‌شوند و به‌سمت صفر میل می‌کنند. پهنای تکه سطح‌ها متناظر است با

$$(۱-\alpha)x,\ \alpha(۱-\alpha)x,\ \alpha^{۲}(۱-\alpha)x,\dots$$

و عرض‌های متناظر عبارتند از

$$x^{\frac{p}{q}},\quad \alpha^{\frac{p}{q}}x^{\frac{p}{q}},\quad \alpha^{\frac{۲p}{q}}x^{\frac{p}{q}},\quad \alpha^{\frac{۳p}{q}}x^{\frac{p}{q}},\dots$$

مقدار تقریبی مساحت، به‌شرطی به‌دست می‌آید که به‌جای نوارها (تکه سطح‌ها)، مستطیل‌هایی در نظر بگیریم که قاعدهٔ آن فاصلهٔ بین نوارها و ارتفاعشان عرض‌ها باشد و، سپس، مجموع مساحت‌های همهٔ این مستطیل‌ها را به‌دست آوریم. اگر در مجموع حاصل، که یک تصاعد هندسی نزولی بی‌پایان را تشکیل می‌دهد، فرض کنیم $\alpha = ۱$، مقدار مجهول مساحتِ شکل، که بین عرض‌های متناظر با طول‌های ۰ و x قرار دارد، به‌دست می‌آید. و این راه‌حل، هم‌ارز است با محاسبهٔ انتگرالی $\int_{۰}^{x} x^{\frac{p}{q}}dx$. فرما با این روش خود، می‌توانست $\int_{x}^{\infty}\frac{dx}{x^{m}}$ را هم محاسبه کند. به‌این ترتیب، فرما، به‌جز شکل‌های سهمی مانند، مساحت شکل‌های هذلولی مانند را هم پیدا می‌کند.

با نمونه‌هایی که آوردیم، روشن می‌شود که فرما، روش‌های اصلی آنالیز را می‌شناخت، ولی روش‌های او مستلزم عمل‌های عظیم بود: او نتوانست قانون‌های کلی و آلگوریتم‌های مربوط به محاسبهٔ دیفرانسیلی و انتگرالی را، شبیه آن‌چه امروز داریم، پیدا کند.

در رابطه با کارهای فرما، باید بلافاصله از کارهای دکارت نام برد.

رنه دکارت (۱۵۹۶ـ۱۶۵۰)، فیلسوف، فیزیک‌دان، ریاضی‌دان و اندام‌ـشناس بزرگ فرانسوی، تباری درباری داشت. آموزش خود را در یک مدرسهٔ

خصوصی متعلق به یسوعیان (ژزوئیت‌ها) به نام La Fleche گذراند. دکارت دربارهٔ این دورهٔ آموزش خود می‌نویسد: «همهٔ آن‌چه از دیگران آموخته‌بودم، یاد گرفتم، ولی به آن‌ها قانع نشدم. هرچه و از هرجا به دستم می‌رسید، می‌خواندم. کتاب‌های مربوط به طبیعت و چیزهای دیگر [علم‌الاشیاء]، برایم بسیار جالب و لازم بود». ولی کتاب حکمت او را راضی نمی‌کرد و می‌خواست با «کتاب جهان» آشنا شود، یعنی با زندگی طبیعت و انسان‌ها.و برای این منظور، به‌گفتهٔ خود او «لازم بود جوانی خود را در سفر بگذارنم، مردمان را در دربارها و آرتش‌ها مورد مطالعه قرار دهم، با مردمانی که در جامعه‌های مختلف و با خصلت‌های مختلف زندگی می‌کنند، آشنا شوم. تجربهٔ بسیار بیاموزم، خودم را در موقعیتی بگذارم که سرنوشتم را روشن می‌کند و همه و همهٔ آن‌چه در تصور است بررسی کنم، به‌نحوی‌که بتوانم نتیجهٔ لازم را به‌دست آورم».

دکارت به بررسی جنگ می‌پردازد و خود در بسیاری از جنگ‌ها، ازجمله جنگ سال سی شرکت می‌کند. مسیر جنگ‌ها او را به سفر وا می‌دارد، که علاقهٔ به آن را تا پایان زندگی حفظ می‌کند.

دکارت بخش عمده‌ای از کارهای علمی خود را در هلند به انجام رسانید، ولی در سال ۱۶۴۹ بنا به دعوت کریستیان پادشاه سوئد، به استکهلم رفت، جایی‌که آرامش خود را بازیافت و محیطی مساعد برای کارهای علمی خود پیدا کرد. ولی هوای سرد سوئد با او سازگار نبود، به‌سختی ضعیف می‌شد و نیروی خود را از دست می‌داد تا سرانجام در سال ۱۶۵۰ از بیماری ذات‌الریه درگذشت.

علاقهٔ استثنایی به فلسفه و دانش‌های طبیعی و ریاضی و همچنین سطح بالای آگاهی‌های دکارت در این رشته‌ها، به او امکان داد فلسفهٔ خاصی را پی‌ریزی کند که تاثیر زیادی از خود باقی گذاشت. این فلسفه، خصلتی دوگانه دارد، زیرا بر دو آغازهٔ متضاد تکیه می‌کند: ایده‌آلیسم و ماتریالیسم.

این دوگانگی بیان، از یک طرف، دکارت را در راه متافیزیک ایده‌آلیستی می‌اندازد و، از طرف دیگر، همهٔ نوشته‌های او در زمینه‌های ریاضی، فیزیک و اندام‌شناسی، خصلت ماتریالیستی دارد. دکارت اساس بررسی‌های علمی خود را بر آموزش دربارهٔ ماده قرار می‌دهد و البته ماتریالیسم او، ماتریالیسم مکانیکی بود. دکارت ویژگی‌های اساسی ماده را، تحرک و بخش‌پذیری آن می‌داند. دکارت در این‌گونه نوشته‌های خود، علیه آموزش فئودالی کلیسایی (آموزش اسکولاستیک) برمی‌خیزد و، درضمن، این شیوهٔ آموزش را متضاد با عقل می‌داند. به‌همین مناسبت است که فلسفهٔ دکارت در تاریخ تکامل فلسفه، عقل‌گرا نامیده می‌شود.

ریاضیات، که دکارت آن را دانشی «دربارهٔ نظم جهان» می‌نامد و آن را بالاتر از همه دانش‌ها قرار می‌دهد، می‌تواند به خواست عقل پاسخ دهد؛ و عجیب نیست که دکارت تا به‌این اندازه شیفتهٔ ریاضیات باشد و نوشته‌های ریاضی او در جریان تکامل بعدی ریاضیات، این‌قدر تاثیر کند.

دکارت که اساس فلسفهٔ علمی خود را بر حرکت ماده گذاشته بود، حرکت را وارد ریاضیات هم می‌کند. اگر تا پیش از دکارت، ریاضیات براساس کمیت‌های ثابت بود و خصلتی متافیزیکی داشت، به‌یاری کارهای دکارت، دیالکتیک وارد دانش ریاضی (و هم دانش‌های طبیعی) شد. به‌قول فردریک فیلسوف آلمانی «کمیت‌های متغیر دکارتی را باید نقطهٔ چرخشی در ریاضیات دانست. به‌یاری این‌ها بود که حرکت و به‌همراه آن دیالکتیک وارد ریاضیات شد».

این چرخش در ریاضیات، بیش از هر جای دیگر، در نوشتهٔ دکارت به‌نام «هندسه» انجام گرفت. اگر پیش از دکارت کیمت‌های ثابت بر ریاضیات حکومت می‌کردند، با وارد شدن حرکت، نوبت به تسلط کمیت‌های متغیر رسید و دیالکتیک را به‌جای متافیزیک نشاند.

«هندسه» تنها یکی از بخش‌های مجموعه‌ای است که دکارت زیر عنوان

«داوری دربارهٔ روش» در سال ۱۶۳۷ چاپ کرد.

«روش» دکارت شامل این چهار قاعده است:

۱. چیزی درست شمرده می‌شود که به‌اندازهٔ کافی روشن باشد. به‌زبان دیگر، باید بی‌شتاب و بدون پیش‌داوری به نتیجه برسد. درضمن بدیهی بودن و روشنی، مهم‌ترین شرط این نتیجه است.

۲. هر مساله یا دشواری را باید به بخش‌های کوچک‌تر تقسیم کرد و تا آن‌جا که لازم است پیش رفت تا بررسی بهتر انجام بگیرد.

۳. بررسی را همیشه باید از ساده‌ترین موقعیت موضوع آغاز کرد و به‌تدریج جلو رفت، همان‌طور که از پلکان بالا می‌رویم، تا به موقعیت‌های پیچیده‌تر موضوع یا پدیده برسیم، زیرا نوعی ردیف حتا بین چیزهایی که به‌دنبال هم نیامده‌اند، وجود دارد.

۴. باید همیشه به همهٔ علت‌ها و دیدگاه‌ها (حقیقت‌ها، کشف‌ها، فرضیه‌ها، دستگاه‌ها) توجه کامل کرد تا اطمینان حاصل شود که چیزی از نظر پنهان نشده است.

دکارت در «هندسهٔ» خود پایه‌های نمادهای حرفی را برای جبر و هندسه تحلیلی می‌ریزد، یعنی امکانی را به‌وجود می‌آورد که به‌یاری آن بتوانیم شکل‌های هندسی و رابطه‌های تحلیلی را به‌کمک معادله‌ها بیان کنیم. البته، این روش پیش از دکارت هم به‌کار می‌رفت و به‌عنوان نمونه، فرما تا حد زیادی آن را تکامل داد. ولی این روش برای دکارت اهمیت زیادی داشت، زیرا به‌کمک آن توانست جهت پیشرفت ریاضیات را در آینده، تغییر دهد. قبل از دکارت و از دوران باستان، هندسه اهمیت زیادی در ریاضیات داشت، حتا مفهوم‌های جبری و دستورها را به‌طور معمول، به‌وسیلهٔ تصویرهای هندسی نشان می‌دادند. حتا خود دانشمندانی هم که نمادهای جبری را به آن‌ها مدیونیم (مثل ویت) چنین بودند. دکارت که شکل‌های هندسی را با عبارت‌های تحلیلی بیان کرد، ریاضیات را به مسیر دیگری انداخت، مسیری که در آن، جبر، در درجهٔ اول

اهمیت بود. به‌همین جهت است که دکارت در «هندسه» و سایر نوشته‌های خود ـ ازجمله نامه‌هایی که به دوستان خود نوشته است ـ، توجه زیادی به جبر می‌کند. درضمن دکارت نمادهای تازه‌ای وضع کرد و به‌همین مناسبت، «هندسه» در تکامل جبر هم اهمیت زیادی داشته است. به برکت کارهای دکارت، جبر، چه در پایه‌های خود و چه در انتخاب نمادها، به جایی رسید که تا امروز هم مورد قبول است.

«هندسهٔ» دکارت برای بسیاری از هم‌عصران او دشوار و دور از دسترس بود. دشواری فهم مربوط به این بود که خواننده با نمادهایی از جبر روبه‌رو می‌شد که برای او تازگی داشت، اندیشه‌های به‌کلی تازه‌ای در آن وجود داشت و در هر باره، بسیار کوتاه صحبت شده‌بود. در واقع، در «هندسهٔ دکارت»، حتا طرح منظم و دقیقی از هندسهٔ تحلیلی وجود ندارد. مثل این است که اشاره‌هایی به اندیشه‌هایی که داشته است، شده باشد و چنان رمزگونه به‌نظر می‌رسد که، برای کشف رمز آن باید دشواری‌های زیادی را تحمل کرد. این روش طرح مطلب، ویژهٔ دکارت است. با استعداد درخشانی که داشت، هرگز حوصله نمی‌کرد، کتاب‌های علمی را که به تفصیل شرح هر موضوعی را داده‌اند، بخواند. وقتی به کتابی دست می‌یافت، می‌کوشید به اندیشهٔ اصلی کتاب پی ببرد و تنها چند صفحهٔ اول آن را می‌خواند. بعد تلاش می‌کرد، همین نتیجه‌گیری‌های نویسندهٔ کتاب را خودش به‌دست آورد. اساس علاقهٔ او به مطالعه، بر همین مبنا بود. با تصور این‌که همین روش مطالعه، برای دیگران هم میسر است، دکارت نوشته‌های خود را بسیار کوتاه و رمزگونه می‌نوشت. برای مثال او در یکی از صفحه‌های نخست «هندسه» می‌نویسد: «ولی من از شرح مفصل می‌گذرم، زیرا نمی‌خواهم شما را از لذتی که در کار مستقل برای شما وجود دارد، محروم کنم».

دکارت در همان آغاز «هندسه» بستگی بین عمل‌های حسابی و رابطه‌های هندسی را شرح می‌دهد. برای این منظور، به این ترتیب، بین آن‌ها تناظری

برقرار می‌کند: «همان‌طور که در حساب با چهار یا پنج عمل سروکار داریم، یعنی جمع، تفریق، ضرب، تقسیم و ریشه گرفتن (که به تعبیری می‌توان آن را نوعی تقسیم به‌حساب آورد)، همان‌طور هم در هندسه، برای این‌که خط مجهول را معین کنیم، تنها باید به این خط، خط دیگری را به آن اضافه یا از آن کم کنیم، یا برای این‌که بستگی بیشتری با عدد داشته باشیم، خطی را (که به‌دلخواه انتخاب کرده‌ایم) به‌عنوان واحد در نظر بگیریم. یا وقتی دو خط دیگر داریم، خط چهارم را طوری پیدا کنیم که نسبت آن به یکی از دو خط، برابر باشد با نسبت دیگری به واحد، و این همان ضرب است؛ یا خط چهارم را طوری پیدا کنیم که نسبت آن به یکی از آن‌دو، برابر باشد با نسبت واحد به دیگری، و این همان تقسیم است؛ یا یک، دو یا چند میانگین متناسب بین واحد و خط دیگری را پیدا کنیم، و این، همان جذر یا کعب و غیره است».

این دیدگاه دکارت به او امکان داد تا بتواند رابطه‌های بغرنج هندسی را، به‌وسیلهٔ عبارت‌های سادهٔ جبری بیان کند. ولی برای این‌که به‌سادگی بتواند این عبارت‌های تحلیلی را پیدا کند، باید به‌طور منظم نمادهای جبری را وضع می‌کرد و نظریهٔ حل معادله‌های جبری را استحکام می‌بخشید. به‌همین دلیل است که در «هندسهٔ» دکارت توجه زیادی به جبر شده است. نمادهایی که دکارت در این کتاب به‌کار می‌برد، به نمادهای مورد استفادهٔ هم‌عصران او، بسیار نزدیک است. دکارت حرف‌های آخر الفبا (x، y، z) را برای مجهول و حرف‌های نخست الفبا (a، b، c) را برای معلوم به‌کار می‌برد. از زمان دکارت، توان‌ها را به‌همان صورتی که امروز معمول است، می‌نوشتند. دکارت برای نوشتن یک معادله، همهٔ جمله‌ها را به‌سمت چپ می‌برد، به‌نحوی که در سمت راست، عدد ۰ می‌شد. ولی او از نماد ∝ برای علامت برابری استفاده می‌کرد؛ باوجودی که نماد $=$ (دو پاره‌خط راست موازی) برای برابری که امروز هم به‌کار می‌بریم، در زمان دکارت وجود داشت: این نماد را پزشک و ریاضی‌دان انگلیسی **روبرت رکورد** (۱۵۱۰_۱۵۵۸) وارد ریاضیات کرده بود.

در «هندسهٔ» دکارت، به قضیهٔ اصلی جبر هم برمی‌خوریم؛ این قضیه را **آلبرت ژیرار** (۱۵۹۵ـ۱۶۳۲) اهل لُورِن فرانسه آورده بود، ولی به احتمال زیاد، دکارت اطلاعی از کار ژیرار نداشت و خود به‌طور مستقل و دوباره نتیجه گرفته بود. مضمون نتیجه‌گیری دکارت این بود که، هر معادله‌ای به تعداد عدد درجهٔ معادله، جواب دارد. درضمن، دکارت می‌پذیرفت که برخی از جواب‌ها ممکن است «دروغ» باشد (او به جواب‌های منفی، جواب دروغ می‌گفت) و یا حتا «خیالی» (یعنی موهومی)[۱]. با همهٔ این‌ها، اثبات قضیه در نوشته‌های دکارت دیده نمی‌شود.

مهم‌ترین کار دکارت در زمینهٔ معادله‌ها، پیدا کردن روشی برای تعیین تعداد ریشه‌های مثبت و تعداد ریشه‌های منفی معادله است. روش دکارت، که به «قانون علامت‌ها» مشهور است، چنین بود: تعداد ریشه‌های مثبت معادله (اگر حقیقی باشند) برابر است با تعداد تغییرعلامت‌ها در جمله‌های معادله، و تعداد ریشه‌های منفی، برابر است با تعداد علامت‌های ثابت. به‌عنوان نمونه، معادلهٔ

$$x^۳ - ۳x^۲ + ۳ - ۱ = ۰$$

سه ریشهٔ مثبت دارد و معادلهٔ

$$x^۳ + ۲x^۲ - x - ۲ = ۰$$

دارای یک ریشهٔ مثبت و دو ریشهٔ منفی است.

در «هندسهٔ» دکارت روش ضریب‌های نامعین هم آمده است: اگر دو چندجمله‌ای با درجهٔ برابر، یکی باشند، ضریب‌های توان‌های برابر، با یکدیگر برابر است. خود دکارت برای حل بسیاری از مساله‌های هندسی، این روش را به‌کار برده است.

به این ترتیب، «هندسهٔ» دکارت، نه‌تنها برای هندسه که برای جبر هم، راه‌های پیشرفت را گشوده است.

اما آن‌چه به‌ویژه به هندسه مربوط می‌شود، دکارت روش مختصاتی را وارد ریاضیات و به‌یاری آن مساله‌های دشوار هندسی را حل کرد، مسیری که در تکامل بعدی ریاضیات نقشی جدی داشت. نام «هندسهٔ تحلیلی» را بعدها، نیوتون بر این روش گذاشت.

دکارت، در کنار طرح روش مختصاتی، قاعده‌هایی را برای به‌دست آوردن معادلهٔ منحنی‌ها و حل مسالهٔ رسم قائم بر منحنی (و همراه آن، مماس بر منحنی) می‌آورد. ولی دکارت وارد فضا نمی‌شود و مختصات نقطه‌های خارج از صفحه را مطرح نمی‌کند.

همان‌طور که پیش از این هم گفتیم، دکارت ارزش زیادی به ریاضیات می‌داد. او معتقد بود که ریاضیات می‌تواند نمونه و الگویی برای دیگر دانش‌ها باشد. به اعتقاد او، تنها دانشی را می‌توان درست و واقعی دانست که روش ریاضی را دنبال کند، زیرا نتیجه‌گیری‌های ریاضیات یقینی، درست و قابل اعتمادند. ولی دکارت، در زمینهٔ داوری دربارهٔ ریاضیات، دچار اشتباهی شده بود: او ریاضیات را، بیرون از جهان واقع و محصولی از کار عقل انسانی می‌دانست و به این نکته توجه نداشت که سرچشمهٔ موضوع‌ها و مفهوم‌های ریاضی، جز دنیای واقعِ دور و بر ما و جز نتیجه‌ای از کار و تجربهٔ طولانی انسان نیست. این اعتقاد دکارت، به او تلقین می‌کرد که آن‌چه انسان می‌اندیشد، درست است و لزومی ندارد به معرض آزمایش گذاشته شود و یا مورد تایید با واقعیت‌های جهان خارج قرار گیرد. برای دکارت، اندیشه‌های ریاضی، به این جهت درست و قطعی هستند که از عقل انسان ناشی شده‌اند، نه از تجربه و عمل. دکارت حقیقت‌های ریاضی را مسلم‌تر از حقیقت‌هایی می‌دانست که به‌یاری تجربه به‌دست آمده‌اند. بنابراین، اگر دکارت در کارهای ریاضی و دانش‌های طبیعی، با وارد کردن کمیت‌های متغیر و فراهم کردن زمینه برای پیدایش بی‌نهایت کوچک‌ها و آنالیز ریاضی، در موضع یک دانشمند نابغه با اندیشهٔ دیالکتیکی است، با بها دادن بیش از اندازه به عقل انسانی و روگردان

شدن از تجربه و عمل و واقعیت‌های جهان خارج، در موضع ذهن‌گرایان قرار دارد.

هم‌عصر کوچکتر فرما و دکارت، و یکی از بزرگترین ریاضی‌دانان، فیزیک‌دانان و فیلسوفان زمان خود، بِلِز پاسکال بود.

بلز پاسکال (۱۶۲۳_۱۶۶۲ میلادی)، در شهر کِلِرمون فرانسه به دنیا آمد. پدرش اِتی‌یِن پاسکال، رئیس دادگاه پژوهش، پس از مرگ همسرش به پاریس رفت و در آن‌جا خود را با ریاضیات و فیزیک مشغول کرد که موفقیت‌های جالبی هم در این مسیر به‌دست آورد. علاقهٔ اتی‌ین به دانش‌های فیزیک و ریاضی، به پسرش سرایت کرد و بلز از همان کودکی استعداد خود را در این زمینه‌ها نمایان ساخت. بنابه گواهی هم‌عصران او، در پنج سالگی، وقتی هیچ اطلاعی از دانش هندسه نداشت، توانست پیش خود، قضیهٔ مربوط به مجموع زاویه‌های درونی مثلث را حل کند و وقتی که تنها ۱۰ سال داشت، رساله‌ای دربارهٔ صدا نوشت. انگیزهٔ نوشتن این رساله، این بود که متوجه شد با انگشت گذاشتن روی لیوانی که به صدا درآمده است، یکباره صدا قطع می‌شود.

دشوار است دربارهٔ این موفقیت‌های پاسکال و ارزش آن‌ها صحبت کنیم، ولی آن‌چه روشن است، در ۱۶ سالگی کتاب پرارزشی دربارهٔ مقطع‌های مخروطی نوشت که بزرگترین ریاضی‌دانان آن زمان ـ دکارت و دزارک ـ ارزش فراوانی برای آن قایل شدند. تنها بخشی از این کتاب، با نام «تجربه‌هایی در نظریهٔ مقطع‌های مخروطی» در سال ۱۶۴۰ چاپ شد.

پاسکال؛ در ۲۰ سالگی ماشین حسابی ساخت که می‌توانست مجموع و تفاضل عددها را پیدا کنید. در این‌باره، لازم است به انگیزه‌ای اشاره کنیم که پاسکال را به اختراع چنین ماشینی واداشت. این انگیزه، نیاز ماموران مالیاتی بود، که خواستار امکانی برای ساده‌تر شدن کار سخت خود بودند.

پدر بلز، از استعداد بی‌اندازهٔ پسرش و کار مداوم و سخت او نگران

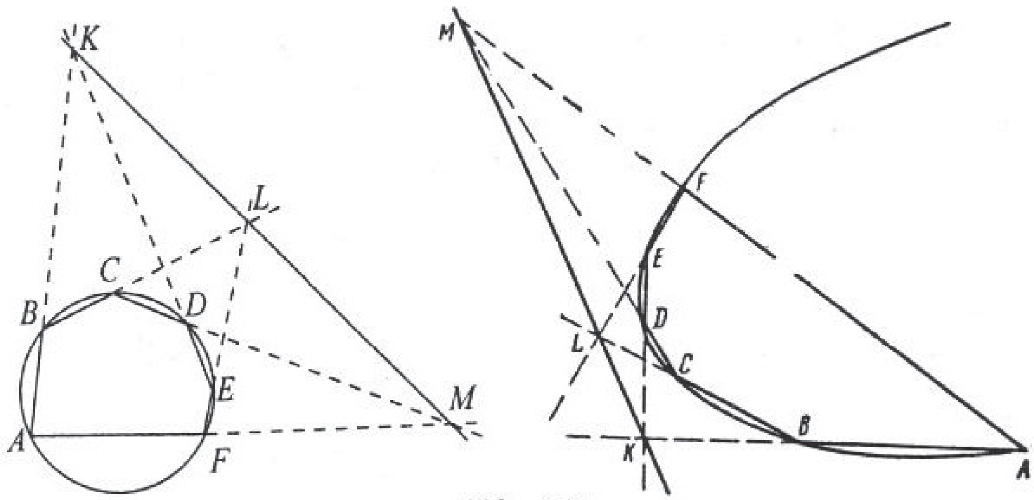
شده بود و حتا تلاش کرد، از رشد علاقهٔ او به دانش جلوگیری کند. او می‌پنداشت، این وضع برای سلامتی پسرش زیان‌آور است. ولی وقتی با شوق بی‌پایان بلز مواجه شد، تصمیم گرفت او را در ادامهٔ راه خود آزاد بگذارد.

ولی در واقع هم کار سخت و پیاپی، به سلامتی بلز صدمه زد. بدن لاغر و ضعیف او، تاب مقاومت در برابر این همه کار فکری را نداشت و پاسکال را در ۳۹ سالگی از پا درآورد.

ارثیهٔ علمی پاسکال بسیار عظیم است و به ریاضیات، فیزیک و فلسفه مربوط می‌شود.

کارهای پاسکال دربارهٔ سیکلوئید و روش‌های انتگرال‌گیری هندسی که برای تعیین مساحت‌ها، حجم‌ها و سطح‌ها به‌کار می‌برد، بی هیچ تردیدی به ریاضی‌دانان برای تکامل آنالیز ریاضی یاری رساند. اندیشه‌های اصلی پاسکال در زمینهٔ روش‌های انتگرال‌گیری، در اثر او زیر عنوان «نامهٔ آ. ده‌تون‌ویل، دربارهٔ کشف‌های هندسی او» (۱۶۵۹) بیان شده است. پاسکال در این نوشته، روش انتگرال‌گیری تابع‌های مثلثاتی را مطرح می‌کند؛ همچنین دربارهٔ «مثلث مُفَسِر» که ضمن صحبت از فرما از آن یاد کردیم، صحبت می‌کند.

پاسکال زیر تاثر کارهای ریاضی‌دان کهن سال هم‌عصر خود، **ژەراردزارک** به هندسهٔ تصویری علاقه‌مند شد. مثل مقطع‌های مخروطی، در این‌جا هم، قضیهٔ بسیار مهمی را آورد که امروز در تاریخ ریاضی به نام «قضیهٔ پاسکال» یا «شش‌ضلعی پاسکال» مشهور است. بنابراین قضیه، «برای هر شش‌ضلعی که در یک مقطع مخروطی (دایره، بیضی، هذلولی یا سهمی) محاط شده‌باشد، نقطه‌های برخورد سه زوج ضلع‌های روبه‌رو، روی یک خط راست واقع‌اند». در شکل ۳۶ طرح این قضیه برای شش‌ضلعی محاط در دایره و شش‌ضلعی محاط در سهمی داده شده است.



شکل ۳۶

در رسالهٔ پاسکال زیر عنوان «دربارهٔ ویژگی بخش‌پذیری عددها»، که بعد از مرگ او چاپ شد، معیارهای کلی برای بخش‌پذیری عددها داده شده است که براساس رقم‌های عدد و مجموع این رقم‌ها قرار دارد. قاعدهٔ کلی پاسکال، برای بخش‌پذیری، چنین است:

اگر بخواهیم بخش‌پذیری عدد nرقمی

$$A = a_1 a_2 \ldots a_{n-1} a_n$$

را بر عدد B آزمایش کنیم، ابتدا عدد ۱۰ را بر B تقسیم و باقی‌ماندهٔ تقسیم را r_1 می‌نامیم، بعد $10r_1$ را بر B تقسیم و باقی‌ماندهٔ تقسیم را r_2 می‌نامیم، سپس باقی‌ماندهٔ حاصل از تقسیم $10r_2$ بر B را r_3 می‌نامیم و غیره؛ تاجایی که دیگر باقی‌ماندهٔ r_{n-1} به‌دست آید. در این صورت اگر مجموع

$$a_n + a_{n-1}r_1 + a_{n-2}r_2 + \ldots + a_1 r_{n-1}$$

بر B بخش‌پذیر باشد، عدد A هم بر B بخش‌پذیر است».

در نوشتهٔ پاسکال به نام «رساله‌ای دربارهٔ مثلث حسابی» (که باز هم بعد از مرگ او در سال ۱۶۶۵ چاپ شد)، پاسکال طرح اصلی نظریهٔ احتمال را می‌ریزد و بعضی از قضیه‌های مربوط به آنالیز ترکیبی را می‌آورد.

مثلث حسابی، مثلثی است که به‌صورت ویژه‌ای از عددها تشکیل شده است. در واقع، این جدولی است که به‌یاری آن می‌توان ضریب‌های بسط دوجمله‌ای با توان عدد طبیعی را پیدا کرد. البته پیش از پاسکال، **میخائیل‌شتیفل** ریاضی‌دان آلمانی در سدهٔ شانزدهم، **جمشید کاشانی** ریاضی‌دان ایرانی سدهٔ پانزدهم، **خیام** ریاضی‌دان ایرانی سدهٔ یازدهم و **کرجی** ریاضی‌دان ایرانی سدهٔ دهم میلادی هم، با چنین جدولی آشنا بودند و ضریب‌های بسط دوجمله‌ای را به‌یاری آن تعیین می‌کردند. طرح این جدول چنین است:

ردیف	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۰	۱									
۱	۱	۱								
۲	۱	۲	۱							
۳	۱	۳	۳	۱						
۴	۱	۴	۶	۴	۱					
۵	۱	۵	۱۰	۱۰	۵	۱				
۶	۱	۶	۱۵	۲۰	۱۵	۶	۱			
۷	۱	۷	۲۱	۳۵	۳۵	۲۷	۷	۱		
۸	۱	۸	۲۸	۵۶	۷۰	۵۶	۲۸	۸	۱	
۹	۱	۹	۳۶	۸۴	۱۲۶	۱۲۶	۸۴	۳۶	۹	۱

در این‌جا ۱۰ سطر نخست این جدول داده شده است، ولی می‌توان آن را تا بی‌نهایت ادامه داد.

ستون سمت چپ ردیف سطرها را با آغاز از صفر می‌دهد. هر ستون بعدی با واحد آغاز می‌شود. درضمن، در هر ستون، عدد واحد در سطری که متناظر با ردیف آن است، قرار دارد، یعنی ستون دوم، روبه‌روی سطر دوم؛ در ستون سوم روبه‌روی سطر سوم و به‌طوری کلی، در kامین ستون، عدد واحد روبه‌روی سطر kام قرار دارد.

اگر عددهای مثلث را با نماد $a_{p.q}$ نشان دهیم که در آن، p نمایندهٔ شمارهٔ سطر و q نمایندهٔ شمارهٔ ستون باشد، آن‌وقت با این فرض، $a_{۲,۳} = ۴$

و $a_{۴,۲}=۶$. تنظیم عددهای مثلث را با این دستور می‌توان روشن کرد:

$$a_{p,q}=a_{p-۱,q}+a_{p-۱,q-۱}$$

به‌عنوان نمونه

$$a_{۴,۳}=a_{۳,۳}+a_{۳,۲}=۱+۳=۴,$$
$$a_{۷,۵}=a_{۶,۵}+a_{۶,۴}=۶+۱۵=۲۱$$

مثلث حسابی پاسکال، ویژگی‌های جالبی دارد که برای محاسبهٔ ضریب‌های بسط دوجمله‌ای و برای آنالیز ترکیبی، اهمیت زیادی دارند. در واقع، به‌سادگی می‌توان قانع شد که تعداد ترکیب‌های p عنصر q به q (C_p^q) برابر است با $a_{p,q}$ ؛ $C_q^p=a_{p,q}$. با این بسط می‌توان هر ضریبی از بسط دوجمله‌ای را پیدا کرد، زیرا ضریب‌های بسط دوجمله‌ای با نماد ترکیب داده می‌شوند.

اگر برای نمونه بخواهیم ضریب جملهٔ ششم از بسط $(a+b)^۹$ را داشته باشیم، باید در مثلث $a_{۹,۵}$ را جست‌وجو کنیم که برابر است با ۱۲۶ و ضریب جملهٔ پنجم از بسط $(a+b)^۷$ (یعنی $C_۷^۴$) برابر است با $a_{۷,۴}=۳۵$.

مثلث پاسکال، ویژگی‌های دیگری هم دارد:

۱. هر عدد مثلث حسابی، برابر است با مجموع همهٔ جمله‌هایی که در ستون قبل، بالای این عدد قرار دارند. مثال

$$۲۰=۱۰+۶+۳+۱,\quad ۵۶=۲۱+۱۵+۱۰+۶+۳+۱=۳۵+۱۵+۵+۱$$

۲. هر عدد مثلث حسابی، برابر است با مجموع همهٔ عددهایی که به‌صورت قطری با آغاز از جملهٔ بالای این عدد تا ستون اول جلو رفته باشد. مثال

$$۷۰=۳۵+۲۰+۱۰+۴+۱$$

۳. اگر هر عدد ستون اول را با عددهایی که به‌صورت قطری و به‌طرف بالا در سمت راست این عدد قرار دارند، جمع کنیم، عددهای دنبالهٔ فیبوناچی به‌دست می‌آید. در واقع

$$
\begin{aligned}
۱ + ۰ &= ۱, \\
۱ + ۰ &= ۱, \\
۱ + ۲ &= ۳, \\
۱ + ۳ + ۱ &= ۵, \\
۱ + ۴ + ۳ &= ۸, \\
۱ + ۵ + ۶ + ۱ &= ۱۳, \\
۱ + ۶ + ۱۰ + ۴ &= ۲۱, \\
۱ + ۷ + ۱۵ + ۱۰ + ۱ &= ۳۴, \\
۱ + ۸ + ۲۱ + ۲۰ + ۵ &= ۵۵, \ldots
\end{aligned}
$$

۴. در هر سطر مثلث حسابی، جمله‌هایی که از دو طرف به یک فاصله‌اند، با هم برابرند.

۵. مجموع جمله‌های هر سطر از مثلث حسابی، برابر است با دوبرابر مجموع جمله‌های سطر قبل.

ویژگی‌های مثلث حسابی را به‌سادگی می‌توان با ویژگی‌های آنالیز ترکیبی، مقایسه کرد. برای نمونه، خود قانون تشکیل مثلث، هم‌ارز است با دستور ترکیب، یعنی $C_p^q = C_{p-۱}^q + C_{p-۱}^{q-۱}$. از ویژگی ۵ مثلث حسابی، می‌توان نتیجه گرفت:

$$C_p^۰ + C_p^۱ + C_p^۲ + \ldots + C_p^p = ۲^p$$

که از آن، می‌توان برای محاسبهٔ مجموع همهٔ ضریب‌های بسط دوجمله‌ای

استفاده کرد.

پاسکال در نامهٔ خود به فرما و همچنین در «مثلث حسابی» خود، بارها از روش استقرای ریاضی استفاده می‌کند و آن را روش باارزشی برای اثبات‌های ریاضی می‌داند.

کار پاسکال زیر عنوان «ماهیت هندسه»، برای پایه‌گذاری فلسفی هندسه اهمیت زیادی دارد. در این کتاب ارزش تعریف‌ها و اصل‌ها را روشن و دقت و قانع‌کنندگی بیشتر آن‌ها را طلب می‌کند. او با این فرض که این خواست برای ریاضیات رعایت می‌شود، پیشنهاد می‌کند که در تمام دانش‌ها و هم در بررسی تفکر انسانی گسترش پیدا کند.

با بررسی فعالیت‌های مزی‌ریاک، فرما، دکارت و پاسکال، با نحوهٔ تکامل ریاضیات در نیمهٔ اول سدهٔ هفدهم در فرانسه آشنا شدیم. دیدیم که این ریاضی‌دانان تا چه‌اندازه برای تکمیل ریاضیات مقدماتی کوشیدند و، درعین حال، با اندیشه‌های تازه‌ای که وارد ریاضیات کردند، به بازسازی آن یاری رساندند و مسیری تازه برای ساختمان روش‌های آنالیز بی‌نهایت کوچک‌ها گشودند.

ولی نباید گمان کرد که اندیشه‌های تازه در ریاضیات، تنها محصول کار ریاضی‌دانان فرانسوی بود. شرایط مشابه زندگی اجتماعی و اقتصادی در همهٔ سرزمین‌های اروپای غربی، سرچشمهٔ نزدیکی اندیشه‌ها بود. به‌همین مناسبت، در دیگر کشورهای اروپایی هم، پیدایش و پیشرفت اندیشه مربوط به آنالیز ریاضی دیده می‌شود. مشهورترین نمایندهٔ این جهت فکری در آلمان، اتریش و چک در این دوره، کپلر، ریاضی‌دان و ستاره‌شناس برجسته بود.

یوهان کپلر (۱۵۷۱ـ۱۶۳۰)، که در شهر وِیل‌-در-‌ شتات (ایالت دورتمبرگ در جنوب‌غربی آلمان) زاده شد، در مدرسهٔ متعلق به کلیسا درس خواند و همان‌جا با ستاره‌شناسی آشنا شد و این دانش مورد علاقه او قرار گرفت. فعالیت علمی خود را در زادگاهش آغاز نکرد. ابتدا به اتریش رفت

و به استادی ریاضیات در گراتس مشغول شد. سپس بنابه دعوت **تیکوبراهه** (۱۵۴۶ـ۱۶۰۱) به پراک رفت و در آن‌جا، با سمت معاون براهه در رصدخانه مشغول به‌کار شد. بعد از مرگ تیکوبراهه، کپلر ادارهٔ رصدخانه را به‌دست گرفت. کارهای عملی عظیمی که از تیکوبراهه ضمن رصدهای طولانی باقی‌مانده بود و کارهای خود کپلر، به او کمک کرد تا بعدها بتواند به نتیجه‌گیری‌های مهمی دربارهٔ حرکت جسم‌های آسمانی برسد که به‌صورت قانون‌های حرکت سیاره‌ها تنظیم و به‌همان صورت وارد علم شد. کپلر در اخترشناسی هوادار کپرنیک بود. او تاکید می‌کرد که خورشید به دور زمین نمی‌چرخد، بلکه این زمین است که به دور خورشید می‌چرخد.

کپلر دانشمند شناخته‌شده‌ای بود که کلیسانشینان به اردوکشی علیه او پرداختند. رنج‌های بسیاری به او تحمیل کردند، به مادرش اتهام جادوگری زدند و در دادگاه بدنام و محکومش کردند. واتیکان، کتاب کپلر دربارهٔ اخترشناسی را «ضد خدا» معرفی کرد و جزو کتاب‌های ممنوع دانست.

کپلر ضمن کار روی حرکت جسم‌های آسمانی، اغلب به مفهوم‌هایی برمی‌خورد که با مفهوم مقدارهای بی‌نهایت کوچک بسیار نزدیک بود. کپلر چنان هنرمندانه از آن‌ها استفاده می‌کرد که باید گفت روشی به‌دست آورد که خیلی نزدیک به روش انتگرال‌گیری است. او این روش را در نوشتهٔ ریاضی خود به‌نام «روش تازهٔ اندازه‌گیری بشکه‌های شراب» آورده است.

روش اصلی کپلر این بود که برای تعیین طول منحنی‌ها، مساحت شکل‌های روی صفحه و حجم جسم‌ها، آن‌ها را به بخش‌های بسیار کوچکی تقسیم و سپس، مجموع آن‌ها را، با استفاده از برخی گزاره‌های هندسی، به‌دست می‌آورد. این روش، در ماهیت خود، چیزی جز انتگرال‌گیری نبود. البته کپلر از اصطلاح «مقدارهای بی‌نهایت کوچک» استفاده نمی‌کرد، ولی برای نمونه، ضمن اندازه‌گیری طول یک قطعه منحنی، آن را تشکیل شده از نقطه‌ها می‌دانست که در استدلال او، هم‌ارز با تقسیم کمان، به عنصرهای بی‌نهایت

کوچک ـ پاره‌خط‌های راست ـ است.

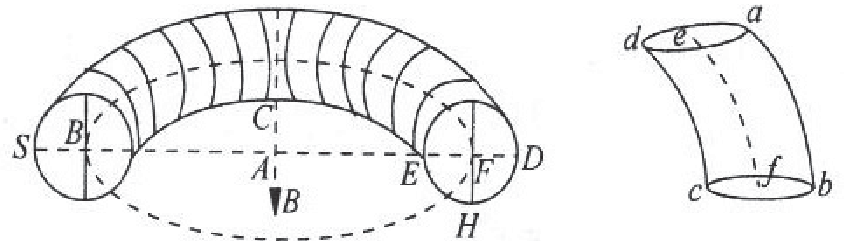
کپلر با طرح نظریهٔ «اندازه‌گیری»، خود را پیرو و تکامل‌دهندهٔ روش ارشمیدس می‌دانست. ولی باید گفت که روش کپلر با روش ارشمیدس به‌کلی متفاوت بود و آن را باید گامی جدی در تکامل روش‌های مربوط به مقدارهای بی‌نهایت کوچک دانست.

کپلر برای محاسبهٔ مساحت دایره، آن را به قطاع‌های برابر تقسیم می‌کرد. اگر تعداد این قطاع‌ها زیاد باشد، هرکدام از آن‌ها را می‌توان به‌تقریب یک مثلث به‌حساب آورد که ارتفاع آن شعاع دایره و قاعده‌اش کمانی از قطاع مفروض است. در این صورت، مساحت دایره برابر است با مجموع مساحت‌های این قطاع‌ها؛ درضمن مجموع قاعده‌های قطاع‌ها برابر محیط دایره و مساحت دایره برابر می‌شود با $2\pi r \times \frac{1}{2}r$ یعنی πr^2. چون درواقع مساحت هر قطاع نمی‌تواند برابر مساحت مثلث باشد، کپلر به این نتیجه می‌رسد که باید تعداد قطاع‌ها را بی‌نهایت گرفت، در این صورت قاعدهٔ قطاع به نقطه‌ای تبدیل می‌شود. البته کپلر به این نکته توجه نمی‌کند که، در این حالت، قطاع تبدیل به شعاع می‌شود و محاسبهٔ مساحت دایره منجر به محاسبهٔ مجموع بی‌نهایتی از بی‌نهایت شعاع درمی‌آید. این روش کار بیشتر به دیدگاه **دموکریت** شباهت دارد تا دیدگاه ارشمیدس، زیرا این روش کار مبتنی بر این فرض است که محیط دایره از اتم‌های غیرقابل تقسیم (یعنی نقطه‌ها) تشکیل شده است.

کپلر از همین روش برای محاسبهٔ حجم کره استفاده می‌کرد و، سپس، برای محاسبهٔ حجم همهٔ جسم‌های دوار، که کپلر تعداد آن‌ها را ۹۲ می‌داند، به‌کار می‌برد. نمونه‌ای از روش کپلر و نوع استدلال او را برای محاسبه حجم می‌آوریم.

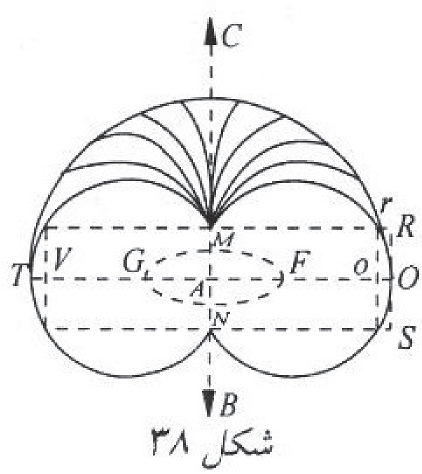
می‌دانیم، چنبره (تُور) به حجمی گفته می‌شود که ضمن دوران دایره دور محوری که در صفحه دایره و در بیرون دایره قرار داد، به‌دست آید. کپلر، چنبره را شبیه شکل ۳۷_a؛ به‌وسیلهٔ صفحه‌هایی که از محور دوران

می‌گذرند، به بخش‌های کوچکی تقسیم می‌کند. هر بخش به‌شکل استوانهٔ خمیده‌ای درمی‌آید که قاعدهٔ آن را همان دایره‌ای تشکیل می‌دهد که دوران کرده است (شکل ۳۷_b).



شکل ۳۷

کپلر هریک از این بخش‌ها را به‌صورت استوانهٔ قائمی با همان قاعده در نظر می‌گیرد که ارتفاع آن برابر پاره‌خط راست ef (میانگین حسابی پاره‌خط‌های راست ab و cd) باشد. به اعتقاد کپلر، این استوانه با استوانهٔ خمیدهٔ اصلی هم‌ارز است. کپلر با روی‌هم گذاشتن این استوانه‌ها، یک استوانهٔ دوار به‌دست می‌آورد (شکل ۳۷_a) که قاعدهٔ آن را دایرهٔ مولد چنبره تشکیل می‌دهد و ارتفاعش میانگین حسابی محیط در دایره‌ای است که دورترین نقطه به محور دوران و نزدیک‌ترین نقطه به آن، رسم می‌کنند؛ یعنی نصف مجموع پاره‌خط‌های راست AD و AE.



شکل ۳۸

اگر شعاع دایره‌ای را که دوران می‌کند برابر r، شعاع AD را R_1 و

شعاع AE را $R_۲$ بنامیم، آن‌وقت حجم چنبره، یعنی V، چنین می‌شود:

$$V = \pi r^۲ \cdot ۲\pi \cdot \frac{R_۱ + R_۲}{۲} = \pi^۲ r^۲ (R_۱ + R_۲)$$

اگر فاصلهٔ AF از مرکز دوران تا مرکز دایره دوران کننده را d بنامیم، آن‌وقت حجم چنبره این‌طور بیان می‌شود:

$$V = \pi^۲ r^۲ d$$

کپلر درحالی مرد که در تنگ‌دستی زیادی به‌سر می‌برد. روی سنگ‌قبر او به خواست خودش نوشته شده است:

«آسمان را اندازه گرفتم،
اکنون زمین را اندازه می‌گیرم.
روحم در آسمان پرواز می‌کند
و جسمم در زمین آرمیده‌است.»

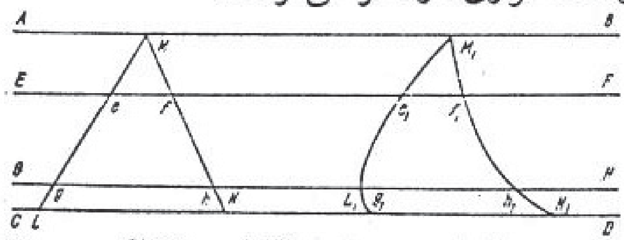
در همان زمانی که کپلر اثرهای اخترشناسی خود را تنظیم می‌کرد و زمینه را برای انتگرال‌گیری هندسی فراهم می‌آورد، در ایتالیا، هندسه‌دان بزرگی به‌نام بوناون‌تورا کاوالیری کار می‌کرد که گالیله‌ئو گالیله (۱۵۶۴_۱۶۴۲)، اخترشناس، فیزیک‌دان و مکانیک‌دان بزرگ، او را بزرگترین ریاضی‌دان زمان و همسان ارشمیدس می‌دانست. او شاگرد گالیله بود.

«**بوناوِن‌تورا کاوالیری** (۱۵۹۸_۱۶۴۷) اهل میلان بود. او در زمان خود به‌صورتی عمیق و همه‌جانبه آموزش دید.

کاوالیری از همان سال‌های نخستین به ریاضیات علاقه‌مند بود، و به‌ظاهر زیر تاثیر گالیله، روش «غیرقابل تقسیم‌ها» را در هندسه به‌وجود آورد که در اثر بزرگ او در سال ۱۶۳۵، «هندسه، با طرح تازه‌ای براساس غیرقابل تقسیم‌های پیوسته» به کمال رسید.

غیرقابل تقسیم‌ها، از نظر کاوالیری، وترهای موازی در درون شکل روی صفحه، و صفحه‌های موازی در درون جسم بود. او برای مقایسهٔ شکل‌های

روی صفحه و جسم‌های فضایی، مفهوم «مجموع همهٔ غیرقابل تقسیم‌ها» را آورد که تمامی سطح و فضای جسم را پر می‌کردند. برای کاوالیری، نسبت این مجموع‌ها، همان نسبت مساحت‌ها و حجم‌ها بود. او شکل‌های روی صفحه را، بین دو خط راست موازی در نظر می‌گرفت.



شکل ۳۹

فرض کنید بین دو خط راست موازی AB و CD، دو شکل قرار گرفته باشند: مثلث LMN و مثلث با ضلع‌های خمیدهٔ $L_1M_1N_1$ (شکل ۳۹). اگر خط‌های راست EF و GH و خط‌های راست دیگر، که موازی با AB و CD رسم شده‌اند، از شکل‌های LMN و $L_1M_1N_1$ وترهای lf و l_1f_1، gh و g_1h_1 و غیره را با طول‌های برابر جدا کنند، آن‌وقت نسبت مجموع خط‌های راست موازی، که در درون شکل‌ها واقع‌اند، برابر واحد می‌شود و، در این صورت، دو شکل مساحتی برابر دارند. ولی اگر نسبت خط‌های راست برابر $m : n$ باشد، نسبت مساحت‌های دو شکل هم $m : n$ خواهد بود.

کاوالیری دربارهٔ جسم‌ها هم به‌همین ترتیب، استدلال می‌کند، تنها در این‌جا، به‌جای خط‌های راست موازی، صفحه‌های موازی را به‌کار می‌برد. در این حالت، مقطع صفحه‌های موازی را با دو جسم به‌دست می‌آورد و نسبت مجموع مساحت‌های این مقطع‌ها را محاسبه می‌کند. کاوالیری می‌نویسید: «دوجسمی که قاعدهٔ آن‌ها بر یک صفحه و ارتفاعشان برابر باشد، به‌شرطی هم‌ارزند [یعنی حجم‌های برابر دارند] که مقطع‌های آن‌ها با صفحه‌های موازیِ با قاعده، هم‌ارز باشند». این نظام کار، به نام «نظام کاوالیری» معروف است.

کاوالیری بر پایهٔ این نظام، قضیه‌های زیادی را ثابت می‌کند. برای نمونه، ثابت کرد نسبت مساحت‌های دو مثلث متشابه، برابر است با نسبت مجذور ضلع‌های متناظر آن‌ها.

ابهامی که در مفهوم «مجموع غیرقابل تقسیم‌ها» وجود دارد، موجب اعتراض و انتقاد سختِ برخی از هم‌عصران کاوالیری شد. به همین مناسبت، کاوالیری کتاب دیگری به نام «شش‌طرح هندسی» را نوشت که در آن، تلاش کرد مفهوم‌هایی را که به‌کار می‌برد، دقیق‌تر کند؛ باوجود این، خود کاوالیری تا پایان زندگی نسبت به کافی بودن استدلال‌های خود در تردید باقی بود، گرچه به درستی آن‌ها اعتقاد داشت.

طرح کاوالیری در «هندسه» و آموزش او دربارهٔ غیرقابل تقسیم‌ها، تنها برای درک بهترِ هندسهٔ مقدماتی سودمند نبود. این آموزش، یعنی جمع کردن غیرقابل تقسیم‌ها، پیش‌درآمدی برای انتگرال‌گیری بود. کاوالیری نماد انتگرال را به‌کار نمی‌برد، ولی در واقع از انتگرال‌گیری برای انتگرال‌های به‌صورت $\int_{0}^{a} x^m dx$ استفاده می‌کرد.

به‌جز این، در «هندسهٔ» کاوالیری به قضیه‌هایی برمی‌خوریم که برای پیدایش محاسبهٔ دیفرانسیلی، ارزش معینی دارند. از آن‌جمله، نخستین گزاره‌ای که در «هندسه» آمده، هم‌ارز با **قضیه رُول** است؛ و به‌دنبال آن گزاره‌ای آمده است که مضمون آن این است: در نقطه‌های ماکزیمم و می‌نیمم تابع، مماس بر نمودار با محور طول موازی است.

یکی از کمبودهای جدی «هندسهٔ» کاوالیری این است که مؤلف از به‌کار گرفتن جبر فراری است و همه‌جا به هندسه‌دانان قدیمی تکیه می‌کند. بی‌تردید، به‌کار گرفتن نمادهای جبری، که در زمان کاوالیری رایج شده‌بود، می‌توانست کارهای او را دقیق‌تر، کامل‌تر و قابل درک‌تر برای هم‌عصرانش نشان دهد.

نیمهٔ دوم سدهٔ هفدهم را باید دوران ادامهٔ پرجوش و خروش تکامل اندیشهٔ کمیت‌های بی‌نهایت کوچک و آنالیز ریاضی دانست. علاقهٔ به این موضوع، در همهٔ کشورهای اروپای غربی دیده می‌شد و بسیاری از دانشمندان ریاضی و فیزیک به بررسی اندیشه مربوط به کمیت‌های بی‌نهایت کوچک مشغول بودند، نظریه‌های خود را می‌ساختند، و با تکیه بر آن‌ها، اساسی‌ترین شاخه‌های

آنالیز، یعنی محاسبهٔ دیفرانسیلی و انتگرالی را تنظیم می‌کردند. از میان این دانشمندان می‌توان از **ژیل روبروال** (۱۶۰۲_۱۶۷۵) عضو فرهنگستان فرانسه و **کریستین هیوگنس** (۱۶۲۹_۱۶۹۵)، فیزیک‌دان، مکانیک‌دان و ریاضی‌دان و اخترشناس هلندی نام برد.

دانشمندان انگلیسی هم در این راه تلاش کردند. یکی از درخشان‌ترین نمایندگان تفکر ریاضی انگلستان، جون والیس بود.

جون والیس (۱۶۱۶_۱۷۰۳)، پسر کشیش شهر کنت، آموزش رسمی و درخشانی را گذراند. ولی ریاضیات جزو رشته‌های آموزشی او نبود؛ به‌همین جهت والیس، که به ریاضیات احساس علاقه می‌کرد، آن را پیش خود یاد گرفت. وقتی که والیس با نوشته‌های ریاضی‌دان زمان خود، دکارت و کاوالیری و همچنین ریاضی‌دانان انگلیسی آشنا شد، شوق او نسبت به ریاضیات بیشتر و بیشتر شد. درضمن والیس استعدادی فوق‌العاده و حافظه‌ای استثنایی داشت.

والیس، نوشته‌های زیادی دربارهٔ ریاضیات دارد. ازجمله می‌توان «حساب بی‌نهایت‌ها»، «دربارهٔ سیکلوئید»، «رسالهٔ جبر» و «ریاضیات عمومی یا دورهٔ کامل حساب» را نام برد. ولی برخی از این نوشته‌ها، استدلال دقیق ندارند و نویسنده بیشتر از استقرای ناقص (و البته بسیار هنرمندانه و ظریف) استفاده کرده یا تنها به نتیجه‌هایی پرداخته است که با تکیه بر آن‌ها می‌توانست کشف‌های علمی خود را ارائه دهد. هدف اصلی والیس از این نوشته‌ها، آشنا کردن خواننده با جنبه‌های عملی موضوع‌ها بود.

کشش اصلی والیس به‌سمت تبلیغ دربارهٔ ریاضیات، عمومی کردن آن و نشان دادن جنبه‌های عملی و کاربردهای این دانش بود. او معتقد بود که ارزش حساب عملی این است که به هنر محاسبه کمک می‌کند، جبر این امکان را ساده‌تر می‌سازد و هندسه هنری است که به کار اندازه‌گیری درست می‌خورد.

والیس در مثلثات از نمادهای ساده‌ای استفاده می‌کرد: او هریک از مقدارهای مثلثاتی را با یک حرف نشان می‌داد (سینوس را با S، کسینوس

را با $\sum$، تانژانت را با T، کتانژانت را با t، سکانت را با s و کسکانت را با σ). این روش به او امکان می‌داد که با تابع‌های مثلثاتی به‌سادگی و مثل دیگر مقدارها عمل کند. یادآوری می‌کنیم که در نوشته‌های والیس، برای نخستین بار، با نماد ∞ روبه‌رو می‌شویم.

والیس در «حساب بی‌نهایت‌ها»، تعریفی برای حد متغیر داده است که تا امروز آن را حفظ کرده‌ایم: «حد یک متغیر، مقدار ثابتی است که مقدار متغیر به‌نحوی به آن نزدیک می‌شود که اختلاف بین آن‌ها می‌تواند از هر عدد دلخواهی کوچکتر باشد.»

نوشته‌های ریاضی والیس، نقش عمده‌ای در گسترش ریاضیات در انگلستان داشت.

والیس دربارهٔ اصل توازی هم کارهایی در زمینهٔ هندسه دارد. او برای اثبات پوستولای اقلیدس، فرض را بر وجود مثلث‌های متشابه با ضریب تشابه مخالف واحد قرار می‌دهد (اصل والیس) و بر اساس آن درستی اصل توازی را ثابت می‌کند.

یکی دیگر از ریاضی‌دانان بزرگ نیمهٔ دوم سدهٔ هفدهم، **ایساک بارُوی** (۱۶۳۰_۱۶۷۷) بود. بارُوی در دانشگاه کمبریج، زبان‌های کهن را آموخت و با راهنمایی والیس به ریاضیات رو آورد. در ۲۹ سالگی استاد زبان یونانی در آکسفورد، سپس استاد هندسه در لندن و سرانجام در سال ۱۶۶۳، رئیس گروه ریاضی در دانشگاه کمبریج شد.

«درس‌هایی از نور و هندسه» از نوشته‌های اوست. او در این کتاب، برای نخستین بار اصطلاح «مثلث دیفرانسیلی» را برای مثلثی که پاسکال «مثلث مفسر» نامیده بود، به‌کار برد.

باروی در کارهای خود، از هواداران نظریه اتمی یونان باستان پیروی می‌کرد و دایره یا هر منحنی بسته‌ای را یک چندضلعی با بی‌نهایت ضلع به‌حساب می‌آورد. از همین‌جا، مماس بر منحنی را امتداد ضلعی از این چندضلعی

می‌دانست. اصطلاح «ضریب زاویهٔ مماس» (یا شیب مماس) را بارُوی وارد ریاضیات کرد و آن را برابر با حد نسبت نمو بی‌نهایت کوچک تابع به نمو بی‌نهایت کوچک متغیر می‌دانست. هرجا که با مقدارهای بی‌نهایت کوچک، در کنار مقدارهای معین و محدود، برخورد می‌کرد، مقدارهای بی‌نهایت کوچک را کنار می‌گذاشت.

باروی به این نتیجهٔ مهم و اساسی رسید که دو مسالهٔ انتگرال‌گیری و دیفرانسیل‌گیری وارون یکدیگرند.

باروی اغلب از شاگرد نابغهٔ خود، ایساک نیوتون که دوستی عمیقی با هم داشتند، یاری می‌طلبید! اگر نیوتون در برخی جنبه‌های ریاضی به معلم خود کمک می‌کرد، بی‌شک باروی هم در شکوفایی علاقهٔ نیوتون به دانش‌های فیزیک و ریاضی نقشی عمده داشت. به‌هر حال، باروی که به‌شایستگی شاگردش پی برده بود و او را بالاتر از خودش احساس می‌کرد، کرسی ریاضیات را در دانشگاه کمبریج به نیوتون واگذار کرد.

ایساک نیوتون (۱۶۴۳_۱۷۲۷) در یک خانوادهٔ نه‌چندان مرفه دهقانی در «بولستورپ» نزدیک شهر «گرانهِم»، به دنیا آمد. پدر اندکی بعد از تولد پسرش مرد. نیوتون در سال ۱۶۶۵ کالج دانشگاه کمبریج را تمام کرد و در سال ۱۶۶۹ کرسی ریاضیات را، به پیشنهاد باروی، اشغال کرد که تا سال ۱۷۰۱ در آن مقام کار می‌کرد.

در همان آغاز کار خود به عنوان استاد، نیوتون کشف‌هایی کرد که مسیرهای به‌کلی تازه‌ای را در رشته‌های گوناگونِ دانش باز می‌کرد و همین کشف‌ها می‌توانست نام او را جاویدان کند. زندگی نیوتون نشان‌دهندهٔ شوق بی‌اندازهٔ او به دانش، فروتنی شگفت‌انگیز او و پُشتکار و علاقهٔ او «به تفکر پیوسته و مداوم، دربارهٔ موضوع‌های گوناگون مورد بررسی او» بود. بدبختی بزرگی دامن‌گیر انگلستان شد و بیماری طاعون به صورت وحشتناکی مردم را به کام مرگ می‌انداخت و نیوتون به‌ناچار کمبریج را ترک کرد، به خلوت

روستا پناه برد. در آن‌جا، در آرامش به بررسی موضوع‌هایی از دانش پرداخت که از دوران نوجوانی، ذهن او را به خود مشغول داشته بود.

اندیشهٔ جاذبه عمومی در همین‌جا ذهن او را فرا گرفت، به نظرش می‌رسید، ماه زیر تاثیر همان نیرویی به دور زمین می‌چرخد که سیب را از بالای درخت به زمین می‌افکند: هر جسمی که به زمین می‌افتد، زیر تاثیر نیرویی است که به نسبت عکس مجذور فاصلهٔ آن تا مرکز زمین، عمل می‌کند. نیوتون ثابت کرد، نیرویی که به سمت مرکز زمین عمل می‌کند، همان نیروی جاذبه‌ای است که ماه را در مسیر معینی ضمن گردش به دور زمین نگه می‌دارد. بعدها که نیوتون به‌درستی دیدگاه خود قانع شده بود، نتیجه‌گیری‌های خود را دربارهٔ حرکت سیاره‌ها، قمرهای مشتری، جزر و مد دریا و حتا حرکت ستاره‌های دنباله‌دار به‌کار برد. به‌این ترتیب بود که نیوتون به یکی از عظیم‌ترین قانون‌های طبیعت پی برد: قانون جاذبهٔ عمومی که می‌توانست یک رشته از پدیده‌های طبیعی را توضیح دهد. در همین‌جاست که نیوتون کتاب «مقدمات ریاضی فلسفهٔ طبیعت» را نوشت. ولی چاپ کتاب تا سال‌های ۱۶۸۶ـ۱۶۸۷ طول کشید. نیوتون در این کتاب اساسی‌ترین قانون‌ها و نظام‌های مکانیک (قانون ماند ـ اینرسی ـ قانون برابری عمل و عکس‌العمل، قانون تغییر مقدار حرکت، قانون جاذبهٔ عمومی و غیره) را تنظیم می‌کند و بررسی‌های زیادی دربارهٔ کاربرد این نظم‌ها در اخترشناسی انجام می‌دهد.

سال‌هایی که در جریان آن، نظریهٔ جاذبهٔ عمومی به‌وجود آمد، برای نیوتون سال‌های کشف‌های بزرگ در زمینهٔ ریاضیات هم به‌شمار می‌رود. در همین زمان بود که قانون بسط دوجمله‌ای با نمای طبیعی و دستور کلی تعیین ضریب‌های این بسط را به‌دست آورد. نیوتون بدون این‌که به جنبه‌های دقیق‌تر مطلب بپردازد، ثابت کرد، قانون بسط دوجمله‌ای را برای حالت‌هایی هم که با نمای کسری یا منفی سروکار داشته‌باشیم، می‌توان به‌کار برد. یادآوری می‌کنیم که اثبات دقیق‌تر دستور بسط دوجمله‌ای برای نماهای منفی و کسری، بعدها

و به‌وسیلهٔ **یاکوب برنولی** و **لئونارد اولر** داده شد که البته دقت کامل ریاضی ندارد. برای بحث دقیق در این حالت‌ها باید به سراغ **کارل گوس** رفت (در سال ۱۸۱۱).

نیوتون بسط دوجمله‌ای را پایه‌ای برای بسط برخی تابع‌های دیگر به رشته‌ای بی‌پایان قرار داد و به‌صورت یکی از نیرومندترین انگیزه‌های تکامل آنالیز، نظریهٔ معادله‌ها، آنالیز ترکیبی و روش بررسی تابع‌ها درآمد.

نوشتهٔ نیوتون به نام «آنالیز به‌یاری معادله‌هایی که بی‌نهایت جمله دارند»، به موضوع «رشته‌ها» اختصاص دارد که نیوتون آن را در سال ۱۶۶۵ نوشت و در سال ۱۶۷۱ به چاپ رسید. نیوتون در این اثر از بسط دوجمله‌ای‌های به‌صورت

$$\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} \text{ و } \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

آغاز می‌کند و با استفاده از روش‌های انتگرال‌گیری، بسط این عبارت‌ها را محاسبه می‌کند:

$$\ln(1+x) \text{ و } \arcsin x$$

برای نیوتون، ریاضیات ابزار نیرومندی برای شناخت قانون‌های طبیعت است،چراکه ریاضیات بازتاب دهندهٔ جهانی است که ما را احاطه کرده است. نیوتون که خود را غرق در بررسی‌های مربوط به فیزیک کرده بود، پی برد که قانون‌های جهان واقع از آن‌ها پیروی می‌کند. بنابراین، باید مطالعهٔ این قانون‌ها یعنی ریاضیات را دقیق و کامل کند.به‌همین جهت کارهای با ارزش و عمیقی دربارهٔ پدید آوردن روش‌های محاسبه به‌یاری ریاضیات انجام داد.

در سال‌های ۱۶۶۵_۱۶۶۶، «بحث دربارهٔ به مربع درآوردن دایره» را نوشت و در سال ۱۶۷۰ «روش فلوکسیون‌ها و رشته‌های بی‌پایان و کاربرد آن‌ها در منحنی‌های هندسی» را تالیف کرد. این دو نوشته، خیلی دیر چاپ شدند: اولی در سال ۱۷۰۴ و دومی در سال ۱۷۳۶ بعد از مرگ نیوتون.

در این دو کتاب، روش‌های آنالیز ریاضی طرح شده است. در این نوشته‌ها و هم در کارهای لایب‌نیتس، که هم‌عصر نیوتون بود، آنالیز بی‌نهایت کوچک‌ها، یعنی در واقع روش‌های دیفرانسیل‌گیری و انتگرال‌گیری به‌طور کامل تنظیم و روشن شده است.

مفهوم‌های اصلی آنالیز ریاضی برای نیوتون بازتابی از مفهوم‌های مکانیک بود. حتا ساده‌ترین شکل‌های هندسی، یعنی خط، زاویه و جسم، به‌وسیلهٔ نیوتون، همچون نتیجه‌هایی از جابه‌جایی مکانیکی در نظر گرفته می‌شد. خط نتیجه‌ای از حرکت نقطه، زاویه نتیجه‌ای از چرخش ضلع آن و جسم نتیجه‌ای از حرکت سطح است. برای نیوتون، مقدار متغیر، چیزی جز نقطهٔ متحرک نیست. نیوتون هر مقدار متغیری را«فلوانت» می‌نامید. فلوانت واژه‌ای لاتینی است به‌معنای «جاری». از آن‌جاکه، هر حرکتی، تنها در جریان زمان امکان دارد، برای نیوتون همیشه «زمان» نمایندهٔ متغیر است. سرعت حرکت، یعنی آن‌چه برای ما مفهوم مشتق را می‌دهد، «فلوکسیون» نامیده می‌شود که آن را با یک نقطه مشخص می‌کند: اگر فلوانت x باشد، فلوکسیون آن $\dot{x}$ است، یعنی مشتق متغیر x نسبت به زمان و با نمادهای امروزی $\frac{dx}{dt}$.

نیوتون به‌روشنی از رابطهٔ معکوس این دو عمل آگاه بود: اگر فلوانت معلوم باشد، فلوکسیون به‌دست می‌آید و، برعکس، با معلوم بودن فلوکسیون می‌توان فلوانت را پیدا کرد. به‌این ترتیب، نیوتون با دقت بستگی بین دیفرانسیل‌گیری و انتگرال‌گیری را (که در کارهای باروی هم می‌بینیم) برقرار کرد.

نیوتون با تجزیه و تحلیل قضیهٔ مستقیم و معکوس، آن‌ها را برای حل تعداد زیادی از مساله‌های هندسه و مکانیک به‌کار برد. او توانست، مسالهٔ مماس بر منحنی، مسالهٔ ماکزیمم و می‌نیمم تابع، محاسبهٔ شعاع انحنای منحنی، محاسبهٔ طول کمانی از منحنی و مساحت شکل‌های محدود به منحنی را حل کند. گاهی مساله‌های پیچیده‌تری را هم حل کرده‌است: با معلوم بودن

رابطهٔ بین فلوکسیون‌ها، به جست‌وجوی رابطهٔ بین فلوإنت‌ها رفته است، یعنی حل یک معادلهٔ دیفرانسیلی.

روش نیوتون برای جست‌وجوی مشتق (فلوکسیون) در آغاز بر اساس کنار گذاشتن بی‌نهایت کوچک‌ها بود، ولی ضمن ادامهٔ کار، روش ساده‌تری را پیدا کرد که به روش مشتق‌گیری امروز ما نزدیک‌تر است. ولی در نوشته‌های نیوتون توضیح روشنی از این روش داده نشده است و استدلال قانع‌کننده‌ای ندارد. این روش در اساس، فلوکسیون را به‌عنوان «نسبت‌های متوالی مقدارهای کوچک شونده» بررسی می‌کند. این تفسیر همراه با ابهام است و به‌همین مناسبت اعتراض‌هایی را برانگیخت. بعدها آن را «افزایش لحظه‌ای» نامید، ولی دربارهٔ آن توضیحی نداد.

کتاب نیوتون زیر عنوان «حساب عمومی یا کتابی دربارهٔ نتیجه‌گیری‌های حسابی آنالیز»، برای تکامل ریاضیات مقدماتی، اهمیت زیادی دارد. این کتاب، در واقع، مجموعه‌ای از سخن‌رانی‌های نیوتون دربارهٔ ریاضیات مقدماتی است که، در طول ۹ سال، در دانشگاه کمبریج، ضمن تدریس ارائه داده بود. از نظر مضمون، این کتاب، جریان تکامل جبر علامتی را در طول چند سده، به پایان می‌رساند. کتاب در سال ۱۷۰۷، به‌یاری **ویلیام وینستون (۱۶۶۷_۱۷۵۲)** دستیار نیوتون در دانشگاه کمبریج چاپ شد.

نیوتون در این کتاب، ابتدا تعریف مفهوم‌های اصلی جبر را می‌دهد، سپس همهٔ عمل‌های حسابی را روی عبارت‌های عددی و حرفی، کسرها و ریشگی‌ها شرح می‌دهد. بعد نوبت به آموزش معادله‌ها می‌رسد. در این‌جا، ابتدا به روش حذف مجهول بین دو معادله می‌پردازد و توجه زیادی به تشکیل معادله‌ها دارد. در «حساب عمومی» مساله‌هایی وجود دارد که تا امروز هم جالب به‌نظر می‌رسند و همیشه مورد استفاده کسانی قرار گرفته است، که کتاب مساله را تنظیم می‌کنند.

از خصلت‌های این کتاب آن است ک نیوتون در سراسر آن از استدلال

صرف‌نظر کرده و برای روشن کردن نظریه‌ها اغلب به مثال متوسل شده است.

او یادآوری می‌کند که اثبات خیلی ساده، ولی گاهی طولانی و کسل کننده است. ولی احتمال نمی‌رود که نیوتون اثبات همهٔ قاعده‌ها و قضیه‌ها را می‌دانسته است، زیرا بسیاری از آن‌ها برای بزرگترین ریاضی‌دانان زمان او ناشناخته بود و برخی به‌وسیلهٔ ریاضی‌دانان بزرگ سدهٔ نوزدهم به اثبات رسید. نیوتون در این کتاب می‌نویسد: «توضیح را می‌توان یا به‌کمک عدد داد، آن‌طور که در حساب معمول است و یا به‌کمک حرف (نیوتون واژه *specie* را به‌معنای «شکل» یا «صورت» به‌کار می‌برد) آن‌طور که در جبر معمول است. هر دو روش بر نظام‌های مشابهی قرار دارند و به یک هدف می‌رسند. درضمن حساب از راه‌های خاص می‌رود و جبر از راه‌های عمومی و کلی ... برتری جبر بر حساب در این است که حساب، راه‌حل را از داده‌ها آغاز می‌کند و به مجهول می‌رسد، درحالی که جبر به وارون عمل می‌کند، یعنی از مجهول آغاز می‌کند و آن را معلوم به‌حساب می‌آورد و خود را به مقدار معلوم که آن را مثل مجهول در نظر می‌گیرد، می‌رساند. از این راه است که یا مقدار مجهول به‌دست می‌آید و یا معادله‌ای را به ما می‌دهد که از آن می‌توان مجهول را پیدا کرد». در همین‌جا، تعریف آنالیز را به‌عنوان تعمیم حساب و جبر می‌دهد.

نیوتون، روش تشکیل معادله را به‌تفصیل روشن می‌کند و مثال‌های زیادی می‌آورد. در همین‌جا به ویژگی‌های چندجمله‌ای‌ها هم می‌پردازد و از جمله روش تعیین بخشیاب‌های چندجمله‌ای‌ها را می‌آورد. این روش را بررسی می‌کنیم.

همان‌طور که گفتیم، در کتاب «حساب عمومی» معادله‌هایی وجود دارد که یا از نظر مضمون و یا از نظر روشِ حل بسیار جالب‌اند. برای نمونه، مسالهٔ کاوها را می‌آوریم که در تاریخ ریاضیات به‌نام «مسالهٔ نیوتون» مشهور شده‌است. متن مساله این است: «۱۲ گاو، $۳\frac{۱}{۳}$ یوگر از علف‌زار را در ۴ هفته می‌خورند [«یوگر» واحد اندازه‌گیری مساحت نزد رومی‌ها و به‌تقریب برابر

۲۵۰۰ متر مربع است]؛ ۲۱ گاو ۱۰ یوگر از همان علف‌زار را در ۹ هفته می‌خورند. چند گاو می‌توانند از ۲۴ یوگر علف‌زار در ۱۸ هفته تغذیه کنند؟».

این نام‌گذاری‌ها را می‌پذیریم: تعداد مجهول گاوها ـ x؛ مقدار علف در هر یوگر به واحد وزن ـ y؛ مقدار علفی که ضمن یک هفته در یک یوگر می‌روید ـ z.

۱۲ گاو در ۴ هفته روی $3\frac{1}{3}$ یوگر $\frac{10}{3}y + \frac{10 \times 4}{3}z$ واحد وزن علف می‌خورند، پس یک گاو در یک هفته $\frac{10(y + 4z)}{3 \times 4 \times 12}$ واحد وزن، علف می‌خورد. برای فرض‌های دوم و سوم مساله هم می‌توان به نتیجه‌های مشابهی رسید:

برای فرض دوم: $\frac{10(y + 9z)}{9 \times 21}$؛

و برای فرض سوم: $\frac{24(y + 18z)}{18x}$

از این‌جا، دو معادله با سه مجهول به‌دست می‌آید:

$$1)\ \frac{10(y + 4z)}{3 \times 4 \times 12} = \frac{10(y + 9z)}{9 \times 21},$$

$$2)\ \frac{10(y + 9z)}{9 \times 21} = \frac{24(y + 18z)}{18x}$$

اگر این معادله‌ها را ساده کنیم و به‌جای نسبت $\frac{y}{z}$ قرار دهیم p، به‌دست می‌آید:

$$1)\ \frac{p + 4}{10} = \frac{p + 9}{21}; \qquad 2)\ \frac{5(p + 9)}{63} = \frac{2(p + 18)}{x}$$

از معادلهٔ اول به‌دست می‌آید؛ $p = 12$. با قرار دادن این مقدار p در معادلهٔ دوم $x = 36$ به‌دست می‌آید.

در بین کارهای ریاضی نیوتون، باید از کتاب «روش تفاوت‌ها» هم نام برد که در سال ۱۷۱۱ چاپ شد. این کار، نخستین تجربه در نظریهٔ «اختلاف‌ها»

است که بعد از نیوتون تکامل یافت و زیر نام «نظریهٔ تفاضل‌های محدود» به رشتهٔ خاصی تبدیل شد. «روش تفاوت‌ها» شامل دستور درون‌یابی نیوتون است که با نمادهای امروزی این‌طور نوشته می‌شود:

$$f(x) = f(x_\circ) + \frac{x - x_\circ}{۱} \cdot \frac{\Delta f(x_\circ)}{h} +$$
$$+ \frac{(x - x_\circ)(x - x_\circ - h)}{۱ \times ۲} \cdot \frac{\Delta^۲ f(x_\circ)}{h^۲} +$$
$$+ \frac{(x - x_\circ)(x - x_\circ - h)(x - x_\circ - ۲h)}{۱ \times ۲ \times ۳} \cdot \frac{\Delta^۳ f(x_\circ)}{h^۳} + \dots$$

در این دستور، $\Delta^n f(x_\circ)$، عبارت است از nامین تفاضل محدود تابع مفروض و h تفاضل بین دو مقدار مجاور متغیر است[۱].

بزرگترین کار نیوتون در فیزیک، به مبحث نور مربوط می‌شود. کار منظم روی نظریهٔ پدیده‌های نوری، نیوتون را به نوشتن کتاب سه‌جلدی «اُپتیک» واداشت. در «اُپتیک» نیوتون، برای پدیده‌های نوری فرضیهٔ خود را مبنی بر مادی بودن آن اعلام می‌کند و نور را شامل ذره‌های مادی تُنُکی می‌داند که از جسمِ سرچشمهٔ نور پراکنده می‌شود. این فرضیه، یعنی فرضیهٔ مادی بودن نور، بعد از نیوتون تا سدهٔ نوزدهم مورد قبول همگان بود تا این‌که فرضیهٔ موجی بودن نور جای آن را گرفت و در زمان ما باتوجه به نظریهٔ کوانتایی، فرضیهٔ نیوتونی تجدید حیات کرده‌است.

نیوتون توانست نور سفید را به پرتوهای رنگی تجزیه کند، پراش (یا

---

[۱]. تفاضل محدود $f(x)$، به اختلاف مقدارهای این تابع گفته می‌شود:

$$f(x_۱) - f(x_\circ) = \Delta f(x_\circ), \quad f(x_۲) + f(x_۱) =$$
$$= \Delta f(x_۱), \dots, \Delta^۲ f(x_\circ) = \Delta f(x_۱) - \Delta f(x_\circ), \dots$$

تفرق) نور را توضیح دهد و دلیل تشکیل رنگین‌کمان را بیاورد . نیوتون، تلسکوپ بازتاب‌دهنده (رِفلکتور) را هم ساخت.

وقتی که کتاب «مقدمات ریاضی فلسفهٔ طبیعت»، کتابی که برای نیوتون افتخار بسیار به‌بار آورد، منتشر می‌شد، یک بدبختی رو کرد. آتش‌سوزی رخ داد و بخشی از کارهای پرارزش او سوخت. نیوتون چنان از این حادثه پریشان شد که تامدتی از سلامت روح او نگران بودند.

نیوتون فیلسوف بزرگی بود. او را می‌توان نمایندهٔ درخشانی از ماتریالیسم مکانیکی در دانش‌های طبیعی دانست.

بعد از چاپ «مقدمات»؛نیوتون در سراسر انگلستان پرآوازه شد. نیوتون پایان عمر خود را در رفاه و رضایت به‌سر برد. بر سنگ قبر او عبارتی به لاتینی نوشته شده است که با این جمله تمام می‌شود: «بگذار مردگان خوشحال باشند، چراکه افتخار نوع انسانی در میان آن‌هاست».

پیش از این هم گفتیم که همراه با نام نیوتون، نام لایب‌نیتس را هم باید به‌عنوان یکی از تنظیم‌کنندگان شاخهٔ تازهٔ ریاضی، یعنی آنالیز ریاضی و به‌ویژه محاسبهٔ دیفرانسیلی و انتگرالی به‌شمار آورد.

گُوتفرید ویلهلم لایب‌نیتس (۱۶۴۶_۱۷۱۶) در ۲۱ ژوئن ۱۶۴۶ در لایپزیگ، جایی که پدرش استاد فلسفهٔ اخلاق در دانشگاه بود، به دنیا آمد. نیاکان لایب‌نیتس اسلاو بودند و نام خانوادگی خود را «لیوبه نِتس» [مهربان] گذاشته بودند، ولی وقتی به آلمان مهاجرت کردند، نام خانوادگی آن‌ها به زبان آلمانی تغییر شکل داد و «لایب‌نیتس» شد.

لایب‌نیتس، این شانس را داشت که بتواند از کودکی، از کتاب‌خانهٔ خوب پدرش استفاده کند و با برخی دانش‌ها، پیش خود با مطالعهٔ شخصی آشنا شود. او پیش خود زبان لاتینی را فرا گرفت و با فلسفهٔ اسکولاستیک و حتا فلسفهٔمکانیکی دکارت آشنا شد. به‌تدریج، لایب‌نیتس جوان به‌سمت ریاضیات کشیده شد و به آن دلبستگی پیدا کرد.

لایب‌نیتس ۱۵ ساله، به دانشگاه لایپزیک رفت و در آن‌جا «حقوق» را به‌عنوان رشتهٔ اختصاصی خود برگزید. دانشگاه را تمام کرد، ولی با آن‌که موفقیت‌های خوبی به‌دست آورده بود، درجهٔ علمی او را ندادند، زیرا بیش از اندازه جوان بود. باوجود این، در سال ۱۶۶۱ رسالهٔ خود را که ماهیتی فلسفی- منطقی داشت، نوشت و در سال ۱۶۶۲ در «آلت دُورف» درجهٔ دکترای خود را گرفت و سمت استادی را به او پیشنهاد کردند. ولی لایب‌نیتس این پیشنهاد را نپذیرفت و به نورنبرگ رفت. در سال ۱۶۷۲ به پاریس رفت و در آن‌جا با هیوگنس و خیلی از دانشمندان دیگر آشنا شد. این آشنایی علاقهٔ قبلی او را به ریاضیات زنده کرد. در همین زمان، بین ریاضی‌دانان صحبت از روش تازه‌ای دربارهٔ محاسبه بود که نیوتون مطرح کرده بود. خود نیوتون، چیزی دربارهٔ کشف خود نمی‌گفت، ولی یکی از کسانی که با نیوتون مکاتبه داشت، موضوع را شایع کرده بود. وقتی لایب‌نیتس دربارهٔ کشف نیوتون شنید، اعلام کرد که او هم روشی پیدا کرده است که به همان نتیجه‌های روش نیوتون منجر می‌شود. لایب‌نیتس، روش خود را در اثرهای «روش‌های تازهٔ ماکزیمم و می‌نیمم، همچنین مماس، که در هیچ حالتی نه مقدارهای کسری و نه مقدارهای گنگ، مانعی برای محاسبه نمی‌شود» (۱۶۸۴) و «هندسهٔ پنهان و آنالیز غیرقابل تقسیم‌ها و بی‌نهایت کوچک‌ها» (۱۶۸۶)، بیان کرده‌است.

لایب‌نیتس در «روش‌های تازه . . .» پایه‌های اصلی محاسبهٔ دیفرانسیلی را طرح می‌ریزد و از این‌جا آغاز می‌کند که نمو بی‌نهایت کوچک تابع را که درنتیجهٔ نمو بی‌نهایت کوچک متغیر پدید می‌آید، به‌دست می‌آورد. لایب‌نیتس این نمو تابع را «دیفرانسیل» می‌نامد و با حرف d نشان می‌دهد.

لایب‌نیتس، سپس در همین کتاب، با آغاز از مسالهٔ جست‌وجوی مساحت محدود به منحنی، مفهوم انتگرال را پیش می‌کشد و آن را با نماد $\int$ نشان می‌دهد که بعد از او مورد قبول همگان قرار گرفت. ولی واژهٔ «انتگرال» بعدها و به‌وسیلهٔ یاکوب برنولی وضع شد.

این دو اندیشه، درواقع، جمع‌بندی اندیشه‌های پراکندهٔ خود لایب‌نیتس در دیگر نوشته‌های او و هم اندیشه‌های ریاضی‌دانان پیش از او بود. ولی پیش از لایب‌نیتس، نه تعریف نمادین، برای مسالهٔ دیفرانسیل‌گیری در نوشته‌های دیگران دیده می‌شود و نه روش کلی برای حل مساله‌های مشابه. لایب‌نیتس، مفهوم دیفرانسیل را همچون اختلاف دو نمو بی‌نهایت کوچک نزدیک به هم از متغیر می‌دانست و از همین‌جا آلگوریتم دیفرانسیل‌گیری را به‌دست آورد و روش خودرا، محاسبهٔ دیفرانسیلی نامید [اصطلاح الگوریتم، به‌وسیلهٔ لایب‌نیتس وارد ریاضیات شد].

لایب‌نیتس، با استفاده از «مثلث مفسر» که پاسکال تنها در حالت دایره به‌کار می‌برد، برای همهٔ منحنی‌ها، در واقع، حوزهٔ کاربرد محاسبهٔ دیفرانسیلی را در هندسه گسترش داد.

در مسالهٔ انتگرال‌گیری، لایب‌نیتس خود را به تابع‌های گویا و صحیح محدود نمی‌کند و روش خود را برای کسرهای جبری هم به‌کار می‌برد.

لایب‌نیتس در کارهای خود، از بسط تابع‌ها به‌صورت رشته‌های توانی استفاده می‌کند و این بسط را ارائه می‌دهد:

$$\frac{\pi}{۴} = ۱ - \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۵} - \frac{۱}{۷} + \dots$$
$$\dots + (-۱)^{n-۱}\frac{۱}{۲n-۱} + \dots$$

درضمن، لایب‌نیتس، دربارهٔ همگرایی رشته‌ها هم بحث کرده است. لایب‌نیتس روش کلی بسط تابع‌ها را، که امروز به اشتباه به نام **تیلور** (۱۶۸۵ـ۱۷۳۱) می‌خوانند، پیدا کرد.

بسیاری از اصطلاح‌هایی که لایب‌نیتس در نوشته‌های خود به‌کار برده است، چنان خوب انتخاب شده‌بودند که تا امروز در ریاضیات باقی‌مانده است. ازجمله می‌توان اصطلاح‌های تابع، مختصات، منحنی جبری، منحنی

غیرجبری و غیره را نام برد.

تاثیر لایب‌نیتس در پیشرفت ریاضیات، منحصر به روش جدید محاسبه نمی‌شود.

در زمینهٔ فلسفه لایب‌نیتس توجه زیادی به «منطق صوری» دارد. او معتقد بود که منطق چیزی جز «دانش تفکر» نیست و می‌تواند همچون ریاضیات، فرمول‌بندی شود. همین اندیشهٔ لایب‌نیتس بود که بعدها تکامل یافت و به‌وسیلهٔ ریاضی‌دانان بعدی، به‌صورت منطق ریاضی درآمد.

لایب‌نیتس معتقد بود که راز موفقیت جبر، در به‌کارگیری هنرمندانهٔ نمادهاست. بنابراین، این امکان وجود دارد، که الگوریتم‌های تازه و جبرهای تازه‌ای بسازیم که بستگی‌های دیگری، غیر از بستگی‌های بین مقدارها را هم بررسی کند. لایب‌نیتس می‌گفت، امید دارد زمان آن برسد که دو فیلسوف، به‌جای مجادله‌های بی‌سرانجام لفظی، پشت میز بنشینند و دربارهٔ دیدگاه‌های خود، تنها به محاسبه بپردازند، شبیه کاری که دو ریاضی‌دان می‌کنند.

استفادهٔ از نمادها، به لایب‌نیتس کمک کرد تا نمادهای لازم در آنالیز ریاضی را به‌وجود آورد و، همین نمادها بود که کار لایب‌نیتس را در محاسبه‌ها ساده‌تر کرد. اگر نیوتون از اندیس‌ها برای نشان دادن یک ردیف مقدار، مثل $x_۱$، $x_۲$ و غیره استفاده می‌کرد، لایب‌نیتس اندیس‌های دوگانه را هم وارد در ریاضیات کرد. او، به‌عنوان نمونه، دستگاه دو معادلهٔ دومجهولی را به این صورت نشان می‌دهد:

$$\begin{cases} a_{۱۰}x + a_{۱۱}y = a_{۱۲} \\ a_{۲۰}x + a_{۲۱}y = a_{۲۲} \end{cases}$$

و امروز به فراوانی از این‌گونه نمادها در دستگاه‌ها، دترمینان‌ها، ماتریس‌ها و غیره استفاده می‌شود.

به‌این ترتیب، نتیجه می‌گیریم که نیوتون و لایب‌نیتس، و هرکدام از مسیر خاص خود، توانستند پایه‌های محاسبهٔ دیفرانسیلی و انتگرالی را بسازند. اگر

نیوتون ترجیح می‌داد، با آغاز از مفهوم‌های مکانیک راه خود انتخاب کند، لایب‌نیتس به‌عنوان یک فیلسوف و هندسه‌دان وارد عمل شد. اگر نیوتون اندکی پیش از لایب‌نیتس، به نتیجه رسید، درعوض لایب‌نیتس بیش از نیوتون، مفهوم‌های آنالیز ریاضی را ساده کرد، تعمیم داد و در اختیار همگان گذاشت. به‌جز این، روش‌های لایب‌نیتس به‌دلیل به‌کارگیری نمادهای مناسب و به‌دلیل قابل‌فهم بودن استدلال‌ها، در همه‌جا و حتا در انگلستان جای روش‌های نیوتونی را گرفت، گرچه انگلیسی‌ها همواره سعی داشتند پیشگامی و اعتبار نیوتون را یادآوری کنند.

۲. پیشرفت آنالیز ریاضی در اروپای غربی در سدهٔ هجدهم

انسان، ضمن مشاهدهٔ طولانی و تجربه‌اندوزی، به این نتیجه رسید که، برخلاف دیدگاه ذهن‌گرایان، اغلب پدیده‌ها و روندهایی که در جهانِ واقع و دور و بر ما جریان دارد، ثابت و بی‌تغییر نیستند. برای مثال، نظریهٔ کانت ـ لاپلاس، استدلال می‌کند که جهان، و ازجمله زمین ما، دوران‌های گوناگونی را گذرانده تا به‌صورت امروزی درآمده است. زیست‌شناسی و دیرین‌شناسی نشانه‌های جدی مبنی بر این‌که گیاهان و جانوران دنیای ما، تغییرها و دگرگونی‌های زیادی را تحمل کرده‌اند، به‌دست می‌دهند. در این میان انسان، این نمایندهٔ برتر جانوران هم تغییر کرده است.

دانش توانسته است بستگی بین گونه‌های مختلف موجودات زنده را پیدا و رفتار کلی و مشترک آن‌ها را روشن کند و بنابراین، اختلاف‌های بین آن‌ها را آشکار سازد. بستگی بین جانوران و گیاهان معلوم شده‌است، حتا جان‌دارانی پیدا شده‌اند که حلقهٔ بین گیاهان و جانوران را تشکیل می‌دهند، یعنی آن‌هایی را که نمی‌توان به‌طور قطع گیاه یا جانور به‌شمار آورد. سرانجام، حتا دربارهٔ اختلاف بین جان‌دار و بی‌جان هم تردیدهایی وجود دارد؛ این اندیشه رواج پیدا می‌کند که امکان تولید یاخته‌های جان‌دار از مادهٔ بی‌جان وجود دارد.

در این دوران، که انسان وجود تغییر را دور و بر خود و در طبیعت درک می‌کرد، طبیعتی که سرچشمه و انگیزهٔ پیدایش مساله‌های هندسه، مکانیک، فیزیک و صنعت است، لازم بود روش‌هایی جست‌وجو شود تا بتواند تغییر کمیت‌های متغیر را بررسی کند و به ماهیت پدیده‌ها و روندهایی که دور و برش می‌گذرد، عمیق‌تر و دقیق‌تر پی ببرد. درضمن، در همین دوران، شبه‌بحرانی در ریاضیات پدید آمده بود. این بحران از این‌جا ناشی می‌شد که پایه‌های روش‌های جدید محاسبه، یعنی محاسبهٔ دیفرانسیلی و انتگرالی، بر بنای مستحکمی قرار نداشت.

با آن‌که نیوتون کوشیده بود نظریهٔ حد را بادقت بیان کند، باز هم کمبودهایی در آن دیده می‌شد. از این‌گذشته در استفادهٔ نیوتون از مقدارهای بی‌نهایت کوچک هم، ناروشنی‌هایی به چشم می‌خورد.

آن‌چه به لایب‌نیتس و هوادارن نزدیک زمان او مربوط می‌شود، آن‌ها حتا تعریفی از کمیت‌های بی‌نهایت کوچک نداده‌اند؛ این مفهوم، در حالت‌های مختلف، تفسیرهای مختلف پیدا می‌کرد.

به‌این ترتیب، خلاقیت آنالیز ریاضی به‌صورت ابزار نیرومندی برای مطالعهٔ پدیده‌ها در دست انسان بود، بدون این‌که خود آنالیز ریاضی به‌درستی در پایه‌خای خود سازمان‌یافته و ساختاری منطقی داشته‌باشد. بنابراین، آنالیز ریاضی که کاربرد خود را در گوناگون‌ترین مساله‌ها با گوناگون‌ترین خصلت‌ها پیدا کرده بود، خود تااندازه‌ای پادرهوا بود و استحکام لازم یک شاخهٔ شایستهٔ ریاضیات را نداشت و این تردید را ایجاد می‌کرد که، نکند این کاربرد موفقیت‌آمیز و گستردهٔ روش تازه، تصادفی باشد.

بسیاری از فیلسوفان و ریاضی‌دانان لزوم پایه‌گذاری منطقی و نظری جریان تازهٔ ریاضی را حس می‌کردند و، به همین دلیل، به‌شدت با به‌کار گرفتن کمیت‌های بی‌نهایت کوچک مخالف بودند. بین ریاضی‌دانان دو گرایش وجود داشت: گروهی در پی تحکیم پایه‌های روش حد بودند و تلاش می‌کردند

تا راه را برای نجات از بحران پیدا کنند؛ ولی گروهی هم بودند که به روش تازه هیچ اعتقادی نداشتند و تلاش می‌کردند در کارهای خود، از کمیت‌های بی‌نهایت کوچک هیچ‌گونه استفاده‌ای نکنند.

روش‌ها و الگوریتم‌های محاسبهٔ تازه، که به‌وسیلهٔ لایب‌نیتس آماده شده بود، به‌سرعت بین هم‌عصران او گسترش یافت. بیش از هرجای دیگر، این روش محاسبه، هواداران خود را در بین برادران برنولی، ریاضی‌دانان سویسی پیدا کرد.

یاکوب برنولی (۱۶۵۴_۱۷۰۵) استاد ریاضیات در دانشگاه بال (از سال ۱۶۸۷) و برادر کوچکترش **یوهان برنولی** (۱۶۶۷_۱۷۴۸)، نامهٔ گرمی برای لایب‌نیتس همراه با چند پرسش فرستاند. ولی منتظر پاسخ نامهٔ لایب‌نیتس نماندند و دشواری‌ها را، خود حل کردند و دامنهٔ کاربردهای روش تازه را گسترش دادند. یاکوب برنولی توانست به‌یاری همین روش، منحنی را پیدا کند که یک نقطهٔ مادی در میدان جاذبه، زیر تاثیر نیروی این میدان و با سرعت نخستینِ صفر می‌پیماید. یاکوب برنولی ثابت کرد که، این منحنی، یک سیکلوئید است. یاکوب برنولی در همین نوشتهٔ خود، نماد $\int$ را که لایب‌نیتس به‌کار برده بود، انتگرال نامید و، مثل لایب‌نیتس، آن را «مجموع» دانست. از همین زمان به بعد لایب‌نیتس هم این نام‌گذاری را پذیرفت و در کنار «محاسبهٔ دیفرانسیلی» اصطلاح «محاسبهٔ انتگرالی» را هم آورد.

یاکوب برنولی با استفادهٔ از این روش محاسبه، بسیاری از مساله‌های هندسی را حل کرد. به‌عنوان نمونه، دستوری پیدا کرد که به‌یاری آن می‌توان شعاع انحنای منحنی‌های روی صفحه را به‌دست آورد. او ویژگی‌های برخی از منحنی‌ها، ازجمله پیچ لگاریتمی را پیدا کرد. او «لمینسکات» را کشف و مطالعه کرد، منحنی که حاصل‌ضرب فاصله‌های هر نقطه آن تا دو نقطه ثابت (کانون‌ها) برابر مقدار ثابت $a^۲$ باشد. معادلهٔ این منحنی در دستگاه

مختصات دکارتی چنین است:

$$(x^۲+y^۲)^۲-۲a^۲(x^۲-y^۲)=۰$$

و در مختصات قطبی

$$\rho^۲=۲a^۲\cos ۲\varphi$$

یاکوب برنولی، برای نخستین بار، واگرا بودن رشتهٔ همساز را ثابت کرد.

پس از مرگ یاکوب برنولی در سال ۱۷۰۵، کرسی ریاضیات در بال به برادرش یوهان برنولی سپرده شد، که تا پیش از آن، کرسی ریاضیات را در دانشگاه گرونینگن در هلند اداره می‌کرد.

یوهان برنولی، همراه با لایب‌نیتس، محاسبهٔ دیفرانسیلی را جمع‌بندی و تنظیم کرد و البته، جنبه‌های دیگر ریاضیات را هم از یاد نبرد. دربارهٔ تابع، عقیده داشت که تابع یک بیان تحلیلی به‌یاری مقدارهای ثابت و متغیر است و این، یک پیشرفت بود، زیرا تا آن زمان، تنها تعبیری هندسی برای تابع قایل بودند.

کارهای برنولی‌ها در زمینهٔ آنالیز ریاضی، به تکامل مسالهٔ مربوط به معادله‌های دیفرانسیلی (که لایب‌نیتس، آن‌ها را، «معادله‌های مجموعی» می‌نامید) یاری بسیار رساند. آن‌ها روش‌های حل معادله‌های دیفرانسیلی همگن و خطی را ـ که امروز نام معادله‌های برنولی را بر خود دارند ـ و همچنین معادله‌های با ضریب‌های ثابت را پیدا کردند.

یوهان برنولی، راه‌حل ساده‌ای برای رفع ابهام از کسرهای به‌صورت $\frac{۰}{۰}$ پیدا کرد که امروز، به اشتباه به نام قاعدهٔ هوپیتال مشهور است. او همچنین راهی برای بسط تابع‌ها پیدا کرد که به رشتهٔ تیلور بسیار شبیه است.

یوهان برنولی، ضمن حل مسالهٔ مربوط به مساحت‌ها و طول کمان‌ها، روش‌های محاسبهٔ انتگرالی را تکامل داد. او مبتکر انتگرال‌گیری از کسرهای گویاست.

برنولی‌ها، با حل مساله‌های مربوط به ماکزیمم و می‌نیمم به مساله‌ای پرداختند که بعدها (و به‌طور عمده در نوشته‌های اولرولاگرانژ) تکامل یافت و به شاخهٔ خاصی از ریاضیات به‌نام «محاسبه‌های واریاسیونی» تبدیل شد.

یوهان برنولی، به‌جز بخش‌های دیگر ریاضیات، به فکر نوشتن کتابی دربارهٔ محاسبه‌های دیفرانسیلی و انتگرالی افتاد، ولی او این کتاب را ننوشت و دیدگاه‌های خود را در درس‌هایی که به شاگرد خود، مارکیز هوپیتال می‌داد، مطرح کرد. همین درس‌ها، مبنای کتابی شد که هوپیتال دربارهٔ دورهٔ اول محاسبهٔ دیفرانسیلی نوشت.

فرانسوا هوپیتال (۱۶۶۱_۱۷۰۴)، که خیلی خوب از آموزش‌های یوهان برنولی استفاده کرده بود، در سال ۱۶۹۶ کتاب «آنالیز بی‌نهایت کوچک‌ها» را منتشر کرد که باید آن را نخستین کتاب منظم درسی در زمینهٔ دیفرانسیل و انتگرال دانست. اهمیت این کتاب در بحث منظم و پیوستهٔ طرح موضوع‌هاست و، به‌همین جهت، در طول سدهٔ هجدهم بارها چاپ و، درضمن از زبان فرانسوی به زبان انگلیسی هم، برگردانده شد.

با آن‌که نخستین دورهٔ محاسبهٔ دیفرانسیلی به‌صورتی منظم و به‌وسیلهٔ هوپیتال نوشته شد، هنوز مسالهٔ پایه‌های منطقی و فلسفی مفهوم‌های «آنالیز» به‌نحوی که برای ریاضی‌دانان پذیرفتنی باشد، حل نشده بود. این کمبود، بیشتر به خصلت معمایی و رمزآمیز مفهوم‌ها مربوط می‌شد. بنابراین، نباید تعجب کرد که در پایان سدهٔ هجدهم، دقیق‌تر در سال ۱۷۸۴، فرهنگستان علوم برلن، مسابقه‌ای را اعلام می‌کند که هدف آن «دقیق کردن و روشن کردن نظریه‌ای که در ریاضیات به بی‌نهایت کوچک‌ها معروف است» بود.

ژوزف لویی لاگرانژ (۱۷۳۶_۱۸۱۳) ریاضی‌دان و مکانیک‌دان مشهور فرانسوی، که در آن زمان رئیس فرهنگستان علوم برلن بود، تلاش کرد آنالیز ریاضی را از به‌کار گرفتن مفهوم حد و کمیت‌های بی‌نهایت کوچک، بی‌نیاز کند. به این منظور، لاگرانژ، مشتق‌های متوالی را، به‌عنوان ضریب‌های

بسط تابع به یک رشتهٔ توانی، تعریف کرد. به این ترتیب توانست، با آغاز از مفهوم‌های جبر کمیت‌های محدود، خود را به مفهوم‌های آنالیز ریاضی برساند. درضمن اصل موضوعی کردن امکان بسط تابع به رشته‌های توانی هم وجود داشت، ولی به این ترتیب، مفهوم کلی تابع، بیش از اندازه، محدود و تنگ می‌شد. به‌جز این، الگوریتم پیشنهادی لاگرانژ، خیلی پیچیده‌تر از الگوریتم لایب‌نیتس بود و بنابراین، کاربرد آن را، از نظر عملی، دشوار می‌کرد. باوجود این، لاگرانژ توانست از عهدهٔ پاسخ‌گویی به بسیاری از موضوع‌های مهم آنالیز ریاضی برآید. او دستور ساده و راحتی برای بیان جملهٔ باقی‌مانده در رشتهٔ تیلور به‌دست داد، نظریهٔ ماکزیمم و می‌نیمم مشروط را آورد و روش واریاسیون مقدار دلخواه ثابت را برای حل معادله‌های خطی دیفرانسیلی عرضه کرد. لاگرانژ در حوزه جبر مقدماتی، نظریهٔ کسرهای مسلسل را مطرح کرد.

با تلاش‌های **ژان لەرون دالامبر**، ریاضی‌دان و فیلسوف فرانسوی (۱۷۱۷ـ ۱۷۸۳)، مبنای دقیق و روشن آنالیز ریاضی پایه‌گذاری شد.

دالامبر در آغاز می‌خواست، آنالیز را بر پایهٔ نظریهٔ حد بنا کند. این اندیشهٔ او، بعدها و به‌وسیلهٔ **کوشی** (۱۷۸۹ـ۱۸۵۷) ریاضی‌دان دیگر فرانسوی تحقق یافت. دالامبر در «دایرةالمعارف» خود، این تعریف را برای حد یک کمیت متغیر می‌دهد: «یک کمیت، وقتی حد کمیت دیگری است که، دومی بتواند به هر اندازهٔ دلخواه نزدیک و تفاوت آن‌ها به هر اندازه که بخواهیم کوچک شود؛ درضمن، کمیت نزدیک شونده، هیچ‌گاه از کمیت دوم تجاوز نکند. بنابراین اختلاف کمیت متغیر با حد آن، به هیچ‌وجه مقدار معینی نیست». و روشن است که، این تعریف، مربوط به کمیتی است که به‌طور یکنوا صعودی باشد.

اهمیت دالامبر در تاریخ تکامل ریاضیات، تنها مربوط به جست‌وجوهای او دربارهٔ حد نبود. او در زمینهٔ نظریهٔ رشته‌ها و معادله‌های دیفرانسیلی هم کارهای زیادی کرده است. او معیار همگرا بودن رشته‌های با جمله‌های مثبت

را به‌دست داد. دالامبر با کارهایی که دربارهٔ معادله‌های دیفرانسیلی خطی با ضریب‌های ثابت و همچنین، دستگاه‌های معادله‌های خطی مرتبهٔ اول و مرتبهٔ دوم انجام داد، به پیشرفت این نظریه‌ها یاری رساند. به‌جز این‌ها، راه‌حل معادلهٔ دیفرانسیلی مرتبهٔ دوم با مشتق‌های جزئی را هم پیدا کرد، معادله‌ای فیزیک ـ ریاضی، که نوسان‌های عرضی سیم را بیان می‌کند و معادلهٔ موجی نامیده می‌شود. در نوشته‌های دالامبر، برای نخستین بار، به تابع‌های با متغیر مختلط برمی‌خوریم.

دالامبر و اولر، شرط دیفرانسیل‌پذیری تابع‌های با متغیر مختلط را هم پیدا کردند که به غلط، در ریاضیات به‌نام شرط کوشی ـ ریمان معروف شده است.

با این‌همه، در کارهای دالامبر هم، توجیه قانع‌کننده‌ای دربارهٔ روش‌های معمول در آنالیز ریاضی وجود ندارد. از این به‌بعد، اندیشهٔ پیشگامان ریاضیات در جهت استدلالی کردن روش‌های بررسی‌های ریاضی و استحکام بخشیدن به پایه‌های این روش‌ها ادامه پیدا کرد. و در واقع، این کار بزرگ را کوشی ریاضی‌دان دیگر فرانسوی به انجام رسانید.

اوگوست کوشی (۱۷۸۹ـ۱۸۵۷)، ریاضی‌دان نام‌دار فرانسوی، در پاریس متولد شد. از همان کودکی استعداد ریاضی خود را نشان داد، به‌نحوی که توجه بسیاری از دانشمندان را به خود جلب کرد.

کوشی پس از به‌پایان رساندن مدرسهٔ پلی‌تکنیک، در شهر شربور به‌عنوان مهندس به‌کار پرداخت. از سال ۱۸۱۶ عضو فرهنگستان علوم و پلی‌تکنیک بود، ولی عقیده‌های سلطنت‌طلبی، او را علیه نظام جمهوری برانگیخت و سرانجام ناچار شد در سال ۱۸۲۰ از پاریس مهاجرت کند. وقتی که در سال ۱۸۳۸ به پاریس برگشت، نتوانست موقعیت پیشین خود را بازیابد و تنها در سال ۱۸۴۸ بود که استاد دانشگاه پاریس (سوربُن) شد.

اساسی‌ترین و منظم‌ترین نوشته‌های کوشی در زمینهٔ ریاضیات را، باید

«دورهٔ آنالیز» (آنالیز جبری) و «محاسبهٔ بی‌نهایت کوچک‌ها» دانست. به‌جز این، نوشته‌های فراوانِ کوشی دربارهٔ معادله‌های دیفرانسیلی، نظریهٔ متغیرهای مختلط و همچنین دربارهٔ جبر (و از آن‌جمله پدید آوردن نظریهٔ دترمینان‌ها)، برای پیشرفت ریاضیات اهمیت زیادی دارند.

نخستین کتاب از این ردیف، با شیوهٔ تازه‌ای، پایه‌های آنالیز ریاضی را بررسی می‌کند. در این کتاب، تعریف دقیقی از کمیت‌های بی‌نهایت کوچک داده شده که در آن، اساس بحث خود را بر عبور حدی گذاشته است. این تعریف، باید این امکان را پدید می‌آورد، که همهٔ عمل‌های روی بی‌نهایت کوچک‌ها و هم محاسبه‌های دیفرانسیلی و انتگرالی را پایه‌گذاری و توجیه کند.

کوشی با تعریف کمیت‌های بی‌نهایت کوچک، این تعریف را برای پیوستگی تابع می‌آورد: تابعی را پیوسته گوییم که در آن، نمو بی‌نهایت کوچک متغیر، متناظر با نمو بی‌نهایت کوچک تابع باشد.

کوشی در این کتاب‌ها، مفهوم همگرایی رشته‌های بی‌پایان را گسترش می‌دهد و انتگرال را به‌عنوان حد مجموع انتگرالی معرفی می‌کند. اهمیت اصلی کوشی در تاریخ ریاضیات، در این است که به نظریهٔ تابع‌های با متغیر مختلط تکانی داد و آن را بسیار پیش برد. او ثابت کرد که رشته‌های توانی در حوزه مختلط، دارای ویژگی‌های همگرایی خاصی هستند؛ او روی مفهوم انتگرال مختلط هم کار کرد.

کوشی نظریهٔ معادله‌های دیفرانسیلی را عمیق‌تر کرد و وجود جواب را برای دستگاه معادله‌های دیفرانسیلی که با شرط‌های خاصی سازگار باشند، در حوزه‌ای که شامل نقطه‌های خاص نباشند، ثابت کرد.

پایه‌گذاری نظری آنالیز ریاضی به‌وسیلهٔ کوشی چنان مستحکم و پایدار بود که اعتبار خود را تا سال‌های آخر سدهٔ نوزدهم حفظ کرد. تنها در پایان سدهٔ نوزدهم، با وارد شدن مفهوم‌های تازه‌ای به آنالیز ریاضیِ رسمی، لزوم

بازبینی پایه‌های آنالیز ریاضی و دقیق‌تر کردن آن‌ها پدید آمد.

تکامل شاخهٔ تازه‌ای که در ریاضیات به‌نام نظریهٔ مجموعه‌ها پدید آمده بود، این امکان را به‌وجود آورد که تعریف‌های دقیق‌تری برای مفهوم‌های اصلی ریاضیات پیدا شود، مفهوم‌هایی مثل تابع، مشتق، پیوستگی، انتگرال و غیره. این تعریف‌ها، بدون هیچ بحثی و تا امروز مورد قبول همگان است. نظریهٔ مجموعه‌ها، تفسیر عمیق‌تری از عدد، این مفهوم اصلی و بنیادی را در ریاضیات، به‌دست داد و شاخهٔ تازه‌ای به نام نظریهٔ تابع‌ها (حقیقی و مختلط) در آنالیز ریاضی بنیان گذاشته شد.

پاسخ، راهنمایی و حل مساله‌ها

پیش از آغاز

۱. وقتی x عددی درست باشد، $۲x^۲$ عددی است زوج. بنابراین y باید عددی فرد باشد، زیرا اگر y عددی زوج باشد، آن‌وقت $۵y^۲$ عددی زوج و درنتیجه $۲x^۲ - ۵y^۲$ عددی زوج می‌شود، درحالی‌که این تفاضل برابر ۷ (یعنی عددی فرد) است.

فرض می‌کنیم $y = ۲z + ۱$ (z عددی است درست). اگر به‌جای y در معادلهٔ اصلی قرار دهیم، سرانجام به این معادله می‌رسیم:

$$x^۲ - ۱۰z^۲ - ۱۰z = ۶$$

از این‌جا معلوم می‌شود که x عددی زوج است. فرض می‌کنیم $x = ۲t$ (t عددی است درست). به‌این معادله می‌رسیم:

$$۲t^۲ - ۵z(z + ۱) = ۳$$

z و $z + ۱$ دو عدد پشت‌سرهم‌اند و، بنابراین، یکی از آن‌ها زوج است. درنتیجه $۵z(z + ۱)$ عددی است زوج. $۲t^۲$ هم عددی زوج است. ولی تفاضل دو عدد زوج، برابر ۳، یعنی عددی فرد شده‌است که ممکن نیست.

۲. دایره‌ها را ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ می‌نامیم. هر چهار دایره از یک نقطه گذشته‌اند. این نقطه‌ها را با A، B، C، D و E نشان می‌دهیم (پنج دایره را به ۵ نوع می‌توان در گروه‌های چهاردایره‌ای جاداد)؛ به‌این ترتیب:

دایره‌های ۱، ۲، ۳ و ۴ در نقطهٔ A؛

دایره‌های ۱، ۲، ۳ و ۵ در نقطهٔ B؛

دایره‌های ۱، ۲، ۴ و ۵ در نقطهٔ C؛

دایره‌های ۱، ۳، ۴ و ۵ در نقطهٔ D؛

دایره‌های ۲، ۳، ۴ و ۵ در نقطهٔ E.

از این پنج گروه، سه گروه دلخواه را در نظر می‌گیریم، مثل گروه‌های

$$۱, ۲, ۳, ۴(A); \quad ۱, ۲, ۳, ۵(B); \quad ۱, ۲, ۴, ۵(C)$$

دو دایرهٔ ۱ و ۲ در هر سه گروه هستند. بنابراین این دو دایره باید از سه نقطهٔ A، B و C بگذرند. ولی دو دایره‌ای که بر هم منطبق نباشند، حداکثر در دو نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند، یعنی باید دو نقطه از سه نقطهٔ A و B و C بر هم منطبق باشند. فرض می‌کنیم A و B بر هم منطبق باشند و آن را M می‌نامیم:

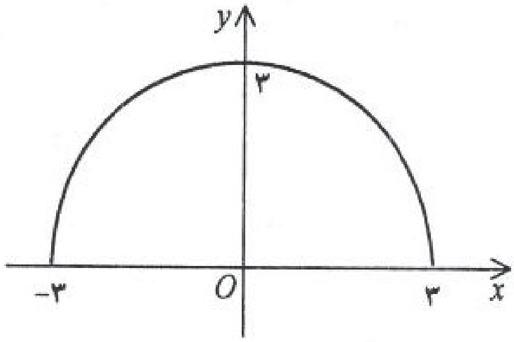
$$A = B = M$$

همین M نقطه‌ای است که هر پنج دایره از آن می‌گذرند، زیرا $M = A$، هم روی دایره‌های ۱، ۲، ۳ و ۴ قرار دارد و هم $M = B$ روی دایره‌های ۱، ۲، ۳ و ۵ واقع است.

۳. روشن است که $y \geq ۰$. بنابراین، برابری $y = \sqrt{۹ - x^۲}$ هم‌ارز است با دستگاه

$$\begin{cases} x^۲ + y^۲ = ۹ \\ y \geq ۰ \end{cases}$$

معادلهٔ اول این دستگاه، معادلهٔ دایره‌ای است به مرکز مبداء مختصات و شعاعی با طول برابر ۳، که اگر نابرابری $y \geq ۰$ را به‌حساب آوریم، برای نمودار $y = \sqrt{۹ - x^۲}$، نیم‌دایره‌ای به مرکز مبداء مختصات، شعاع برابر ۳ و واقع در بالای محور $x'x$ به‌دست می‌آید (شکل ۴۰)



شکل ۴۰

۴. الف) x می‌تواند هر عدد حقیقی را اختیار کند. روشن است که برای y، همیشه مقداری مثبت به‌دست می‌آید. چون داریم:

$$|x+۲| = \begin{cases} x+۲ & (x > -۲) \\ ۰ & (x = -۲) \\ -x-۲ & (x < -۲) \end{cases} \quad ; \quad |x-۱| = \begin{cases} x-۱ & (x > ۱) \\ ۰ & (x = ۱) \\ -x+۱ & (x < ۱) \end{cases}$$

بنابراین، برای تعیین مقدار تابع در حالت‌های مختلف، باید سه حالت را در نظر بگیریم:

۱) $x < -۲$. در این حالت $x + ۲ < ۰$ و $x - ۱ < ۰$ و

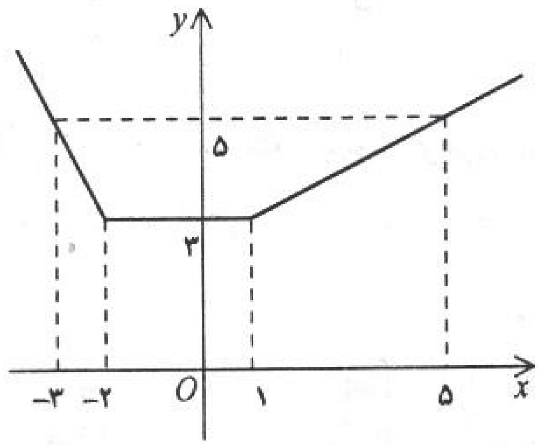
$$y = -x - ۲ - x + ۱ = -۲x - ۱;\ y = -۲x - ۱$$

۲) $-۲ \leq x \leq ۱$. در این حالت $x + ۲ \geq ۰$ و $x - ۱ \leq ۰$ و

$$y = x + ۲ - x + ۱ = ۳;\ y = ۳$$

۳) $۱ < x$. در این حالت $x + ۲ > ۰$ و $x - ۱ > ۰$ و

$$y = x + ۲ + x - ۱ = ۲x + ۱;\ y = ۲x + ۱$$



شکل ۴۱

نمودار تابع در شکل ۴۱ دیده می‌شود. این نمودار نسبت به خط راست $x = -\frac{۱}{۲}$، متقارن است. به‌کمک ضابطهٔ تابع هم می‌شد فهمید که با تبدیل x به $x - \frac{۱}{۲}$ [یعنی با انتقال مبداء مختصات به نقطهٔ $\left(-\frac{۱}{۲}, ۰\right)$] به این معادله می‌رسیم:

$$y = \left|x - \frac{۱}{۲} + ۲\right| + \left|x - \frac{۱}{۲} - ۱\right| = \left|x + \frac{۳}{۲}\right| + \left|x - \frac{۳}{۲}\right|$$

که در آن، با تبدیل x به $-x$، مقدار y تغییر نمی‌کند.

$$\left|-x + \frac{۳}{۲}\right| + \left|-x - \frac{۳}{۲}\right| = \left|x - \frac{۳}{۲}\right| + \left|x + \frac{۳}{۲}\right| = y$$

زیرا $|-A| = |A|$، یعنی

$$\left|-x - \frac{۳}{۲}\right| = \left|-\left(x + \frac{۳}{۲}\right)\right| = \left|x + \frac{۳}{۲}\right|,$$

$$\left|-x + \frac{۳}{۲}\right| = \left|-\left(x - \frac{۳}{۲}\right)\right| = \left|x - \frac{۳}{۲}\right|$$

ب) $x \in \mathbf{R}$. برای y داریم:

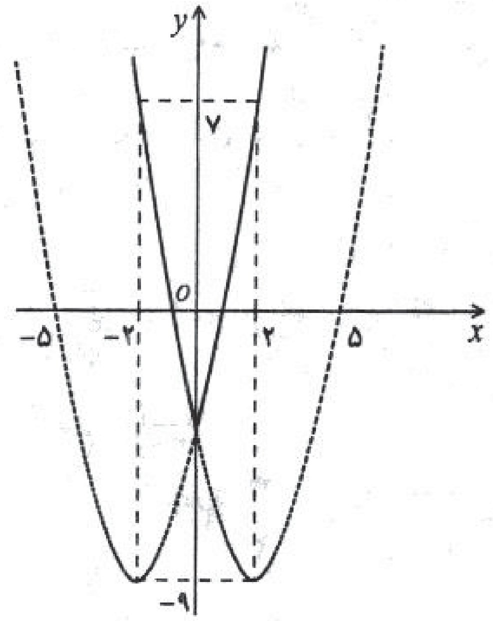
$$y = \begin{cases} x^{۲} - ۴x - ۵ & (x < ۰) \\ -۵ & (x = ۰) \\ x^{۲} + ۴x - ۵ & (x > ۰) \end{cases}$$

نمودار تابع و شکل ۴۲ داده شده‌است. محور عرض، محور تقارن نمودار است. اگر در ضابطهٔ تابع، x را به $-x$ تبدیل کنیم، مقدار y تغییر نمی‌کند.

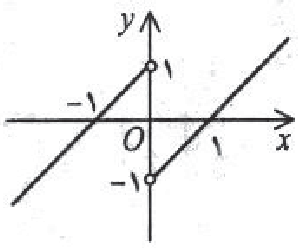
ج) $x \in \mathbf{R}$ و $y \neq ۰$، داریم:

$$y = \begin{cases} x - ۱ & (x > ۰) \\ x + ۱ & (x < ۰) \end{cases}$$

نمودار تابع شامل دو نیم‌خط راست موازی است و آغاز این نیم‌خط‌ها، متعلق به نمودار نیست (شکل ۴۳).



شکل ۴۲



شکل ۴۳

۵. m و n با هم نمی‌توانند برابر صفر باشند، زیرا در این‌صورت معادله‌ای نخواهیم داشت.

برای حالت‌های $m = 0$ و $n \neq 0$ یا $m \neq 0$ و $n = 0$، به معادله‌های درجه دوم

$$3x^2 - 2x + 1 = 0 \quad \text{یا} \quad 5x^2 - x + 5 = 0$$

می‌رسیم که، در هر دو وضع، ریشه‌های موهومی دارند. بنابراین می‌توان فرض کرد $m \neq 0$ و $n \neq 0$. درضمن، برای سادگی کار، دو طرف معادله را بر n تقسیم می‌کنیم و $\alpha = \frac{m}{n}$ می‌گیریم. بعد از اندک تبدیل‌هایی، به این معادله می‌رسیم:

$$(3\alpha + 5)x^2 - (2\alpha + 1)x + \alpha + 5 = 0 \qquad (1)$$

۱) برای این‌که معادلهٔ (۱) دو ریشهٔ برابر داشته باشد، باید مبین آن برابر صفر شود:

$$\Delta = (2\alpha + 1)^2 - 4(3\alpha + 5)(\alpha + 5) = 0;$$

که از آن‌جا به برابری $8\alpha^2 + 76\alpha + 99 = 0$ و یا باتوجه به مقدار α به برابری

$$8m^2 + 76mn + 99n^2 = 0$$

می‌رسیم. اگر بخواهیم می‌توانیم m را برحسب n و یا n را برحسب m به‌دست آوریم:

$$m = \frac{1}{8}\left(-38 \pm 2\sqrt{163}\right)n$$

۲) برای این‌که دست‌کم یکی از ریشه‌ها برابر صفر باشد، باید داشته باشیم $\alpha + 5 = 0$.

پاسخ. $m + ۵n = ۰$ و $۳m + ۵n \neq ۰$. درضمن هر دو ریشهٔ معادله نمی‌توانند برابر صفر باشند (چرا؟).

۳) برای این‌که دو ریشهٔ معادله با علامت‌های مختلف باشند، باید داشته باشیم:

$$(۳\alpha + ۵)(\alpha + ۵) < ۰ \Rightarrow -۵ < \alpha < -\frac{۵}{۳}$$

پاسخ. $-۵ < \frac{m}{n} < -\frac{۵}{۳}$.

۴) اگر ریشه‌های معادلهٔ (۱) را x' و x'' بنامیم، باید داشته باشیم:

$$x'^۲ + x''^۲ = x'x'' \Rightarrow (x' + x'')^۲ - ۳x'x'' = ۰$$

که اگر قرار دهیم $x' + x'' = \frac{۲\alpha + ۱}{۳\alpha + ۵}$ و $x'x'' = \frac{\alpha + ۵}{۳\alpha + ۵}$، به رابطهٔ مطلوب می‌رسیم.

پاسخ. $۵m^۲ + ۵۶mn + ۷۴n^۲ = ۰$.

۶. اگر سرعت اولی را v کیلومتر در ساعت بگیریم، به این معادله می‌رسیم:

$$\frac{۴۰}{v} - \frac{۴۰}{v + ۲} = ۱ \Rightarrow v = ۸$$

(جواب منفی معادله، قابل قبول نیست).

پاسخ. سرعت اولی ۸ کیلومتر در ساعت و سرعت دومی ۱۰ کیلومتر در ساعت.

۷. ۱) چون $x \neq ۰$، بنابراین می‌توان دو سمت برابری را بر $x^۲$ بخش کرد:

$$۶x^۲ + ۵x - ۳۸ + \frac{۵}{x} + \frac{۶}{x^۲} = ۰$$

که می‌توان آن را به‌این صورت نوشت:

$$6\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+5\left(x+\frac{1}{x}\right)-38=0$$

به‌فرض $z=x+\frac{1}{x}$، داریم:

$$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x^2+2+\frac{1}{x^2}\right)-2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=z^2-2$$

و معادله به این صورت درمی‌آید:

$$6(z^2-2)+5z-38=0 \Rightarrow 6z^2+5z-50=0$$

برای z دو جواب به‌دست می‌آید $z=-\frac{10}{3}$ و $z=\frac{5}{2}$. به این ترتیب:

$x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2};$	$x+\frac{1}{x}=-\frac{10}{3};$
$2x^2-5x+2=0;$	$3x^2+10x+3=0;$
$x_3=2,\ x_4=\frac{1}{2}$	$x_1=-3,\ x_2=-\frac{1}{3}$

۲) اگر شبیه معادلهٔ ۱) عمل کنیم، به این معادلهٔ درجه دوم می‌رسیم:

$$6z^2+7z-24=0 \Rightarrow z_1=\frac{3}{2},\ z_2=-\frac{8}{3}$$

که در آن $z=x-\frac{1}{x}$. بنابراین

$x-\frac{1}{x}=-\frac{8}{3};$	$x-\frac{1}{x}=\frac{3}{2};$
$3x^2+8x-3=0;$	$2x^2-3x-2=0;$
$x_3=\frac{1}{3},\ x_4=-3$	$x_1=2,\ x_2=-\frac{1}{2}$

یادداشت. معادلهٔ درجهٔ چهارم به‌صورت

$$ax^۴ + bx^۳ + cx^۲ \pm bx + a = ۰$$

معادلهٔ با ریشه‌های وارون نام دارد و به‌صورتی که در تمرین‌های ۱) و ۲) دیدیم، حل می‌شود.

۳) اگر معادله‌ای با ضریب‌های درست، ریشه یا ریشه‌های درست داشته باشد، این ریشه، یکی از بخشیاب‌های مقدار ثابت معادله است. مقدار ثابت معادلهٔ ما برابر است با ۲۴ و بخشیاب‌های آن عبارتند از ۱±، ۲±، ۳±، ۴±، ۶±، ۸±، ۱۲± و ۲۴±. اگر عبارت سمت چپ برابری را $f(x)$ بنامیم، برای اینکه $f(x) = ۰$ ریشه‌ای برابر $x = a$ داشته باشد، باید داشته باشیم $f(a) = ۰$ (a ریشهٔ معادله است و بنابراین در آن صدق می‌کند). بخشیاب‌ها را آزمایش می‌کنیم:

$$f(۱) = ۱ - ۲ - ۱۳ + ۱۴ + ۲۴ = ۲۶ \neq ۰$$
$$f(-۱) = ۱ + ۲ - ۱۳ - ۱۴ + ۲۴ = ۰;$$

و اگر به‌همین ترتیب ادامه دهیم، به‌دست می‌آید:

$$f(۲) = ۰;\ f(-۳) = ۰;\ f(۴) = ۰$$

معادله چهار جواب درست دارد:

$$x_۱ = -۱,\ x_۲ = ۲,\ x_۳ = -۳,\ x_۴ = ۴$$

در واقع، معادلهٔ مفروض به‌این صورت است:

$$(x + ۱)(x - ۲)(x + ۳)(x - ۴) = ۰$$

۴) به‌سادگی و با فرض $x^۲ + x + ۱ = t$ حل می‌شود.

پاسخ. $x_۱ = ۱$، $x_۲ = -۲$. دو ریشهٔ دیگر معادله موهومی و ریشه‌های معادلهٔ $x^۲ + x + ۵ = ۰$ هستند.

۵) معادلهٔ مفروض را به‌ترتیب، به‌این‌صورت تبدیل می‌کنیم:

$$\frac{(x-۱)^۲}{x^۲} + \frac{(x-۱)^۲}{(x-۲)^۲} = \frac{۴۰}{۹};$$

$$(x-۱)^۲\left[\frac{۱}{x^۲} + \frac{۱}{(x-۲)^۲}\right] = \frac{۴۰}{۹};$$

$$(x-۱)^۲[(x-۲)^۲ + x^۲] = \frac{۴۰}{۹}x^۲(x-۲)^۲;$$

$$۹(x^۲ - ۲x + ۱)(x^۲ - ۲x + ۲) = ۲۰(x^۲ - ۲x)^۲;$$

که با فرض $x^۲ - ۲x = z$، بعد از عمل‌های ساده، به‌دست می‌آید:

$$۱۱z^۲ - ۲۷z - ۱۸ = ۰ \Rightarrow z_۱ = ۳,\ z_۲ = -\frac{۶}{۱۱}$$

و اگر این جواب‌ها را در معادلهٔ $x^۲ - ۲x = z$ قرار دهیم، چهار ریشهٔ معادلهٔ ما به‌دست می‌آید:

$$x_۱ = -۱,\ x_۲ = ۳,\ x_۳ = ۱ - \sqrt{\frac{۵}{۱۱}},\ x_۴ = ۱ + \sqrt{\frac{۵}{۱۱}}$$

۶) با شرط $x \neq ۰$، می‌توان معادله را این‌طور نوشت:

$$\sqrt[۵]{۳+x}\left(\frac{۱}{۳} + \frac{۱}{x}\right) = \frac{۶۴}{۳}\sqrt[۵]{x} \Rightarrow \frac{\sqrt[۵]{۳+x}}{\sqrt[۵]{x}} \cdot \frac{۳+x}{۳x} = \frac{۶۴}{۳}$$

یا $\frac{۳+x}{x}\sqrt[۵]{\frac{۳+x}{x}} = ۶۴$، درنتیجه $\sqrt[۵]{\left(\frac{x+۳}{x}\right)^۶} = ۶۴$.

که اگر دو طرف برابری را به توان ۵ برسانیم (باتوجه به برابری $۲^۶ = ۶۴$) به‌دست می‌آید:

$$\left(\frac{x+۳}{x}\right)^۶ = (۲^۶)^۵ = (۲^۵)^۶ = ۳۲^۶ \Rightarrow \frac{x+۳}{x} = \pm ۳۲$$

که از آن‌جا به‌دست می‌آید: $x_۱ = \frac{۳}{۳۱}$ و $x_۲ = -\frac{۱}{۱۱}$. هر دو ریشه قابل قبول‌اند. برای نمونه $x_۲$ را در معادله آزمایش می‌کنیم:

$$\text{سمت چپ معادله} = \frac{\sqrt[۵]{۳-\frac{۱}{۱۱}}}{۳} + \frac{\sqrt[۵]{۳-\frac{۱}{۱۱}}}{\sqrt[۵]{-\frac{۱}{۱۱}}} =$$

$$= \frac{\sqrt[۵]{۳۲}}{۳\sqrt[۵]{۱۱}} - \frac{۱۱\sqrt[۵]{۳۲}}{\sqrt[۵]{۱۱}} =$$

$$= \frac{\sqrt[۵]{۳۲} - ۳۳\sqrt[۵]{۳۲}}{۳\sqrt[۵]{۱۱}} = -\frac{۳۲\sqrt[۵]{۳۲}}{۳\sqrt[۵]{۱۱}} = -\frac{۳۲\times ۲}{۳\sqrt[۵]{۱۱}} =$$

$$= \frac{۶۴}{۳}\sqrt[۵]{-\frac{۱}{۱۱}} = \text{سمت راست معادله}$$

۷) باتوجه به این‌که

$$(x-۳)^۲ + ۳x - ۲۲ = x^۲ - ۳x - ۱۳ = (x^۲ - ۳x + ۷) - ۲۰$$

معادلهٔ مفروض به‌این صورت درمی‌آید:

$$(x^۲ - ۳x + ۷) - ۲۰ = \sqrt{x^۲ - ۳x + ۷}$$

$z = \sqrt{x^۲ - ۳x + ۷}$ می‌گیریم (روشن است که $z > ۰$)، در این صورت

$$z^۲ - ۲۰ = z \Rightarrow z^۲ - z - ۲۰ = ۰$$

تنها ریشه مثبت این معادله $z = ۵$ است، یعنی

$$\sqrt{x^{۲} - ۳x + ۷} = ۵ \Rightarrow x^{۲} - ۳x - ۱۸ = ۰$$

از آن‌جا $x_{۱} = ۶$ و $x_{۲} = -۳$. آزمایش نشان می‌دهد که هر دو عدد ۶ و -۳، ریشه‌های معادله‌اند.

۸) معادلهٔ مفروض را می‌توان این‌طور نوشت:

$$\frac{۳ - x}{x - ۱} \cdot \sqrt[۳]{\frac{۳ - x}{x - ۱}} + \sqrt[۳]{\frac{x - ۱}{۳ - x}} = \frac{۲}{x - ۱}$$

بافرض $z = \sqrt[۳]{\frac{۳ - x}{x - ۱}}$، داریم $\frac{۱}{z} = \sqrt[۳]{\frac{x - ۱}{۳ - x}}$. از طرف دیگر

$$\frac{۳ - x}{x - ۱} = \frac{۲ + (۱ - x)}{x - ۱} = \frac{۲}{x - ۱} - ۱$$

چون $z^{۳} = \frac{۳ - x}{x - ۱}$، پس

$$\frac{۲}{x - ۱} - ۱ = z^{۳} \Rightarrow \frac{۲}{x - ۱} = z^{۳} + ۱$$

به‌این ترتیب، معادلهٔ مفروض، برحسب z، به این صورت درمی‌آید:

$$z^{۳} \cdot z + \frac{۱}{z} = z^{۳} + ۱ \Rightarrow z^{۵} - z^{۴} - z + ۱ = ۰$$

سمت چپ برابری قابل تجزیه است.

$$z^{۴}(z - ۱) - (z - ۱) = ۰ \Rightarrow (z - ۱)^{۲}(z + ۱)(z^{۲} + ۱) = ۰$$

جواب $z=-1$ قابل قبول نیست، زیرا برابری $\sqrt[3]{\frac{3-x}{x-1}}=-1$، منجر به برابری نادرست $3=1$ می‌شود. پس

$$\sqrt[3]{\frac{3-x}{x-1}}=1 \Rightarrow x=2$$

آزمایش هم، درستی جواب را تایید می‌کند.

۹) اگر دو طرف معادله را در مزدوج عبارت سمت چپ برابری ضرب کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\left(12-\frac{12}{x^2}\right)-\left(x^2-\frac{12}{x^2}\right)=x^2\left(\sqrt{12-\frac{12}{x^2}}-\sqrt{x^2-\frac{12}{x^2}}\right)$$
$$\Rightarrow \sqrt{12-\frac{12}{x^2}}-\sqrt{x^2-\frac{12}{x^2}}=\frac{12}{x^2}-1,$$

اگر این معادله را از معادلهٔ اصلی کم کنیم، نتیجه می‌شود:

$$2\sqrt{x^2-\frac{12}{x^2}}=x^2-\frac{12}{x^2}+1$$

که از آن‌جا به‌سادگی به‌دست می‌آید:

$$\sqrt{x^2-\frac{12}{x^2}}=1 \Rightarrow x^4-x^2-12=0$$

که دو ریشهٔ حقیقی دارد: $x_1=2$ و $x_2=-2$. آزمایش هم، درستی جواب را تایید می‌کند.

۸. ۱) می‌دانیم میانگین حسابی دو عدد مثبت از میانگین هندسی آن‌ها کوچکتر نیست، یعنی اگر x و y دو عدد مثبت باشند، همیشه داریم:

$$\frac{x+y}{۲} \geq \sqrt{xy} \text{ یا } x+y \geq ۲\sqrt{xy}$$

علامت برابری، تنها وقتی برقرار است که x و y، دو مقدار برابر باشند.

چون a، b و c عددهایی مثبت‌اند، پس

$$\frac{a}{c}+\frac{c}{a} \geq ۲\sqrt{\frac{a}{c}\cdot\frac{c}{a}} = ۲,\ \frac{b}{c}+\frac{c}{b} \geq ۲,\ \frac{b}{a}+\frac{a}{b} \geq ۲$$

سمت چپ نابرابری فرض را، تبدیل می‌کنیم:

$$\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{a+c}{b} = \frac{a}{c}+\frac{b}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{a}{b}+\frac{c}{b} =$$

$$= \left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right) \geq ۲+۲+۲ = ۶$$

۲) داریم:

$$a+b \geq ۲\sqrt{ab}, \quad b+c \geq ۲\sqrt{bc}, \quad c+a \geq ۲\sqrt{ca}$$

از ضرب این نابرابری‌ها در یکدیگر به‌دست می‌آید (سه نابرابری هم‌جهت‌اند و مقدارهای سمت چپ و سمت راست نابرابری، در هر سه حالت مثبت است؛ به‌همین جهت می‌توان آن‌ها را در هم ضرب کرد):

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq ۸\sqrt{a^۲b^۲c^۲} = ۸abc$$

۹. ۱) بعد از تبدیل‌های ساده، به این معادله می‌رسیم:

$$\lg^۲ x - ۵\lg x + ۶ = ۰ \Rightarrow \lg x = ۲, ۳$$

از آن‌جا $x_1 = 100$ و $x_2 = 1000$. این دو عدد، ریشه‌های معادله‌اند، زیرا در آن صدق می‌کنند.

۲) می‌دانیم مبنای لگاریتم نمی‌تواند برابر عددی منفی یا صفر و یا واحد باشد. بنابراین، برای x باید داشته باشیم (دامنهٔ معادله):

$$x > 0,\ x \neq \frac{1}{3},\ x \neq 1 \qquad (*)$$

اکنون اگر از دستور $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$ استفاده کنیم، معادلهٔ مفروض به این صورت درمی‌آید:

$$\log_2(3x) = \log_2(x^2) \Rightarrow 3x = x^2$$

از آن‌جا $x_1 = 0$ و $x_2 = 3$. تنها ریشهٔ معادله $x = 3$ است، زیرا باتوجه به شرط‌های $(*)$، x نمی‌تواند برابر صفر باشد.

۳) دامنهٔ معادله با این شرط‌ها معین می‌شود:

$$a > 0,\ x > 0,\ a^2x \neq 1,\ \frac{x}{\sqrt{a}} \neq 1$$

باتوجه به دستور $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$، به‌ترتیب به‌دست می‌آید:

$$\frac{3}{\log_x(a^2x)} + \frac{1}{2\log_x\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right)} = 2;$$

$$\frac{3}{2\log_x a + 1} + \frac{1}{2\left(1 - \frac{1}{2}\log_x a\right)} = 2;$$

$$\frac{3}{1 + 2\log_x a} + \frac{1}{2 - \log_x a} = 2$$

که از آن‌جا به‌دست می‌آید $\log_x a = ۱$ و $\log_x a = \frac{۳}{۴}$، درنتیجه $x_۱ = a$ و $x_۲ = \sqrt[۳]{a^۴}$. مقدارهای a و $\sqrt[۳]{a^۴}$ به‌شرطی ریشه‌های معادله‌اند که برای $a > ۰$ داشته باشیم:

$$\frac{x}{\sqrt{a}} \neq ۱ \text{ و } a^۲x \neq ۱$$

و این، به‌معنای آن است که باید مقدارهایی از پارامتر a را که به‌ازای آن‌ها: الف) $a^۲x = ۱$ و ب) $\frac{x}{\sqrt{a}} = ۱$، باید کنار گذاشت. الف) اگر $a^۲x = ۱$، آن‌وقت

به‌ازای $x = a$ داریم:

$$a^۲ \cdot a = ۱ \Rightarrow a = ۱$$

به‌ازای $x = a^{\frac{۴}{۳}}$ داریم:

$$a^۲ \cdot a^{\frac{۴}{۳}} = ۱ \Rightarrow a = ۱$$

ب) اگر $\frac{x}{\sqrt{a}} = ۱$، آن‌وقت به‌ازای $x = a$ داریم:

$$\frac{a}{\sqrt{a}} = ۱ \Rightarrow a = ۱$$

و به‌ازای $x = a^{\frac{۴}{۳}}$ داریم:

$$\frac{a^{\frac{۴}{۳}}}{\sqrt{a}} = ۱ \Rightarrow a = ۱$$

یعنی مقدارهایی که برای x به‌دست می‌آوریم، با شرط‌های $a \neq ۱$ و $a > ۰$ ریشه‌های معادله‌اند که با آزمایش هم تایید می‌شود.

۱۰. ۱) با تشکیل دستگاه‌هایی شامل معادله‌های دوبه‌دوی ضلع‌های مثلث، مختصات راس‌های مثلث را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} x - y = ۰ \\ ۲x - y = ۳ \end{cases} \Rightarrow A \left| \begin{matrix} ۳ \\ ۳ \end{matrix} \right. ; \begin{cases} x - y = ۰ \\ x + ۲y = ۵ \end{cases} \Rightarrow B \left| \begin{matrix} \frac{۵}{۳} \\ \frac{۵}{۳} \end{matrix} \right. ;$$

$$\begin{cases} x + ۲y = ۵ \\ ۲x - y = ۳ \end{cases} \Rightarrow C \left| \begin{matrix} \frac{۱۱}{۵} \\ \frac{۷}{۵} \end{matrix} \right.$$

اگر در مثلث ABC، ضلع AB را قاعدهٔ مثلث و CH را ارتفاع وارد بر آن بگیریم، داریم:

$$|AB| = \sqrt{\left(۳ - \frac{۵}{۳}\right)^۲ + \left(۳ - \frac{۵}{۳}\right)^۲} = \sqrt{۲ \times \frac{۱۶}{۹}} = \frac{۴}{۳}\sqrt{۲};$$

$$|CH| = \frac{\left|\frac{۱۱}{۵} - \frac{۷}{۵}\right|}{\sqrt{۱ + ۱}} = \frac{۴}{۵\sqrt{۲}}$$

بنابراین، اگر مساحت مثلث را S بنامیم:

$$S = \frac{۱}{۲}|AB| \cdot |CH| = \frac{۱}{۲} \times \frac{۴\sqrt{۲}}{۳} \times \frac{۴}{۵\sqrt{۲}} = \frac{۸}{۱۵} \quad \text{(واحد مربع)}$$

یادداشت. می‌توانستیم مساحت مثلث را به‌یاری یک دترمینان مرتبهٔ سوم به‌دست آوریم (صفحهٔ ۲۳۲ را در جلد چهارم «ریاضیات محاسبه‌ای» ببینید).

مساحت مثلث، برابر قدرمطلق حاصل این دترمینان است:

$$\frac{۱}{۲} \begin{vmatrix} x_A & x_B & x_C \\ y_A & y_B & y_C \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{vmatrix}$$

به‌این ترتیب

$$S = \frac{۱}{۲} \left\| \begin{matrix} ۳ & \frac{۵}{۳} & \frac{۱۱}{۵} \\ ۳ & \frac{۵}{۳} & \frac{۷}{۵} \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{matrix} \right\| = \frac{۱}{۲} \left\| \begin{matrix} ۰ & ۰ & \frac{۴}{۵} \\ ۳ & \frac{۵}{۳} & \frac{۷}{۵} \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{matrix} \right\| =$$

$$= \frac{۱}{۲} \left| \frac{۴}{۵}\left(۳ - \frac{۵}{۳}\right) \right| = \frac{۱}{۲} \times \frac{۱۶}{۱۵} = \frac{۸}{۱۵}$$ (واحد مربع)

۲) از آن‌جا که سه میانهٔ مثلث، از یک نقطه می‌گذرند، کافی است معادلهٔ دو میانه را به‌دست آوریم و مختصات نقطهٔ برخورد آن‌ها را پیدا کنیم. اگر نقطهٔ وسط ضلع BC را A' و نقطهٔ وسط AC را B' بنامیم، به‌دست می‌آید:

$$A'\left(\frac{۲۹}{۱۵}, \frac{۲۳}{۱۵}\right) \text{ و } B'\left(\frac{۱۳}{۵}, \frac{۱۱}{۵}\right)$$

با در دست داشتن مختصات دو نقطهٔ A و A'، معادلهٔ میانهٔ AA' و به‌یاری مختصات B و B'، معادلهٔ میانه BB' به‌دست می‌آید:

$$(AA') : ۱۱x - ۸y - ۹ = ۰; \quad (BB') : ۴x - ۷y + ۵ = ۰$$

و دستگاه شامل این دو معادله، مختصات نقطهٔ G (گرانیگاه مثلث ABC) را به ما می‌دهد.

پاسخ. $G\left(\frac{۱۰۳}{۴۵}, \frac{۹۱}{۴۵}\right)$

یادداشت. نقطهٔ G (نقطهٔ برخورد میانه‌ها)، پاره‌خط راست AA' را به‌نسبت ۲ : ۱ تقسیم می‌کنند:

$$|GA'| : |GA| = ۱ : ۲$$

بنابراین، مختصات نقطهٔ G را می‌توان با این دستور به‌دست آورد:

$$x_G = \frac{x_A + ۲x_{A'}}{۳} \text{ و } y_G = \frac{y_A + ۲y_{A'}}{۳}$$

که ما را به همان پاسخ می‌رساند.

۱۱. پاسخ. اگر قاعدهٔ بزرگتر ذوزنقه را از چپ به راست AB و قاعدهٔ کوچکتر آن را CD بنامیم، به این معادله‌ها می‌رسیم:

$$(AB): x-۳y-۸=۰;\quad (CD): x-۳y+۴=۰;$$
$$(AC): ۵x-۳y+۲۰=۰;\quad (BD): ۳x+y-۴=۰;$$
$$(BC): x+۳y+۸=۰;\quad (AD): ۱۱x-۱۳y+۱۲=۰$$

۱۲. اگر محور $y'y$ محور تقارن سهمی باشد، معادلهٔ آن به‌صورت $y=ax^۲+c$ درمی‌آید. مختصات دو نقطه از سهمی (که داده شده است)، باید در این معادله صدق کنند. درنتیجه به این دو معادله برحسب a و c می‌رسیم:

$$۴a+c=۴,\quad ۳a+c=۰$$

از آن‌جا $a=۴$ و $c=-۱۲$. بنابراین، معادلهٔ مجهول سهمی به‌صورت $y=۴x^۲-۱۲$ درمی‌آید.

۱۳. راهنمایی. وقتی محور تقارن سهمی موازی $y'y$ باشد، معادله‌ای به‌صورت $y=ax^۲+bx+c$ دارد.

پاسخ. $y=\frac{۱}{۲}x^۲+۳x+\frac{۵}{۲}$.

۱۴. اگر معادلهٔ سهمی را به این صورت، به‌ترتیب، تبدیل کنیم:

$$y=-x^۲-x+۲=-(x^۲+x)+۲=$$
$$=-\left[\left(x+\frac{۱}{۲}\right)^۲-\frac{۱}{۴}\right]+۲=-\left(x+\frac{۱}{۲}\right)^۲+\frac{۹}{۴}$$

روشن می‌شود که نقطهٔ $S\left(-\frac{۱}{۲},\frac{۹}{۴}\right)$ بالاترین نقطهٔ واقع بر سهمی و، بنابراین، راس آن است. وتر سهمی باید از نقطهٔ S بگذرد و بر خط راست

$x + ۴y = ۵$ عمود باشد. ضریب زاویهٔ وتر، عکس قرینهٔ ضریب زاویهٔ این خط راست، یعنی برابر ۴ می‌شود. بنابراین باید معادلهٔ خط راستی را پیدا کرد که از S عبور کند و ضریب زاویه‌ای برابر ۴ داشته باشد.

پاسخ. $۱۶x - ۴y + ۱۷ = ۰$. نقطهٔ دوم برخورد این وتر با سهمی، نقطهٔ $\left(-\frac{۹}{۲}, -\frac{۵۵}{۴}\right)$ است.

۱۵. ۱) **پاسخ.** $a = ۴$ و $S(-۲, -۱)$. به‌ازای $a = ۴$، معادلهٔ سهمی به‌صورت

$$y = x^۲ + ۴x + ۳$$

درمی‌آید که، به‌جز نقطهٔ به طول ۱−، در نقطهٔ به طول ۳− هم‌محور $x'x$ را قطع می‌کند.

۲) اگر معادلهٔ سهمی را به این صورت تبدیل کنیم:

$$y = (a - ۳)\left[x^۲ + \frac{a}{a - ۳}x + \frac{a - ۱}{a - ۳}\right] =$$
$$= (a - ۳)\left[\left(x + \frac{a}{۲(a - ۳)}\right)^۲ + \frac{۳a^۲ - ۱۶a + ۱۲}{۴(a - ۳)^۲}\right]$$

روشن می‌شود که طول راس سهمی در حالت کلی $x = -\frac{a}{۲(a - ۳)}$ است. برای این‌که راس روی $y'y$ باشد، باید طول آن برابر صفر شود که از آن‌جا به‌دست می‌آید: $a = ۰$ و معادلهٔ سهمی به‌صورت $y = -۳x^۲ - ۱$ درمی‌آید و راس آن، $S(۰, -۱)$، روی محور عرض است.

یادداشت. وقتی راس سهمی روی محور $y'y$ باشد، محور عرض محور تقارن سهمی می‌شود که معادلهٔ کلی آن باید به‌صورت

$$y = mx^۲ + n$$

باشد، یعنی جملهٔ درجه اول نسبت به x نداشته باشد. به‌این ترتیب، از همان آغاز، برای حل مساله، می‌توانستیم ضریب x، یعنی a را برابر صفر قرار دهیم.

۳) برای این‌که خط راستی بر یک منحنی مماس باشد، باید ضمن حل دستگاه شامل معادله‌های منحنی و خط راست، به معادله‌ای با ریشهٔ مضاعف (یعنی دو ریشهٔ برابر) برسیم.

$$\begin{cases} y = (a-3)x^2 + ax + a - 1 \\ y = 5x + 4 \end{cases} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (a-3)x^2 + (a-5)x + a - 5 = 0$$

و برای این‌که این معادله دو ریشهٔ برابر داشته باشد، باید مبین آن برابر صفر شود:

$$\Delta = (a-5)^2 - 4(a-3)(a-5) = (a-5)(-3a+7) = 0$$

که از آن به‌دست می‌آید $a_1 = 5$ و $a_2 = \frac{7}{3}$. به‌ازای $a = 5$ سهمی

$$y = 2x^2 + 5x + 4$$

به‌دست می‌آید که اگر آن را با معادلهٔ خط راست در یک دستگاه قرار دهیم، مختصات نقطهٔ تماس (تنها نقطهٔ مشترک خط راست و منحنی) به‌دست می‌آید. به‌ازای $a = \frac{7}{3}$، به سهمی

$$y = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{7}{3}x + \frac{4}{3}$$

می‌رسیم که، به همان ترتیب، می‌توان مختصات نقطهٔ تماس آن را با خط راست پیدا کرد.

پاسخ. $a = 5$ یا $a = \frac{7}{3}$. در حالت $a = 5$، نقطه $(0, 4)$ و در حالت $a = \frac{7}{3}$، نقطهٔ $(-2, -6)$ نقطه‌های تماس‌اند.

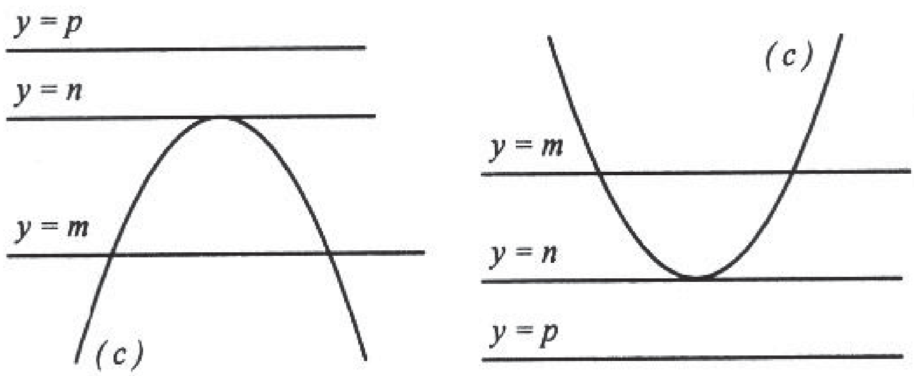
۴) در حالت ۲) از همین مساله برای طول راس سهمی به‌دست آوریم: $x = -\frac{a}{2(a-3)}$. اگر این مقدار را در معادلهٔ سهمی قرار دهیم، عرض راس سهمی به‌دست می‌آید:

$$y = \frac{a^2}{4(a-3)} - \frac{a^2}{2(a-3)} + a - 1 = \frac{3a^2 - 16a + 12}{4(a-3)}$$

بنابه‌فرض مساله، این مقدار باید برابر ۲ باشد:

$$\frac{3a^2 - 16a + 12}{4(a-3)} = 2 \Rightarrow a_1 = 2, \quad a_2 = 6$$

به‌ازای $a = 2$ به سهمی $y = -x^2 + 2x + 1$ می‌رسیم که نقطهٔ $S_1(1, 2)$ راس آن است (محاسبه کنید!). به‌ازای $a = 6$ به سهمی $y = 3x^2+6x+5$ می‌رسیم که نقطهٔ $S_2(-1, 2)$ راس آن است.



شکل ۴۴

یادداشت. خط راست $y = 2$، موازی با محور $x'x$ است. خط راست موازی $x'x$، نسبت به سهمی سه حالت می‌تواند داشته باشد: ۱) مثل $y = m$ سهمی را در دو نقطه قطع کند؛ مثل $y = n$ بر سهمی مماس

باشد؛ ۳) مثل $y = p$ با سهمی نقطهٔ مشترکی نداشته باشد (شکل ۴۴).
وقتی خط راستی موازی $x'x$ بر سهمی مماس باشد، نقطهٔ تماس، همان راس منحنی است. در مسالهٔ ما، این خط راست معادله‌ای به‌صورت $y = ۲$ دارد که می‌خواهیم بر سهمی مماس باشد (تا عرض راس سهمی برابر ۲ شود). بنابراین دستگاه

$$\begin{cases} y = (a - ۳)x^۲ + ax + a - ۱ \\ y = ۲ \end{cases}$$

باید منجر به معادله‌ای با دو ریشهٔ برابر (یعنی یک ریشهٔ مضاعف) شود. دستگاه، منجر به حل این معادله می‌شود:

$$(a - ۳)x^۲ + ax + (a - ۳) = ۰$$

و برای این‌که ریشهٔ مضاعف داشته باشد، باید مبین آن برابر صفر شود:

$$\Delta = a^۲ - ۴(a - ۳)^۲ = ۰ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow ۳(a - ۲)(-a + ۶) = ۰$$

که به همان جواب‌های $a_۱ = ۲$ و $a_۲ = ۶$ می‌رسد.

۵) مختصات راس سهمی‌های (۱) را، پیش از این به‌دست آورده‌ایم:

$$S\left(x = -\frac{a}{۲(a - ۳)},\quad y = \frac{۳a^۲ - ۱۶a + ۱۲}{۴(a - ۳)}\right) \qquad (۱)$$

همین دستگاهی که شامل مقدارهای x و y (مختصات راس S) است، می‌تواند به‌عنوان معادلهٔ پارامتری مکان هندسی راس سهمی معرفی شود. در این‌صورت، بخشی از مکان که برای آن $a < ۳$، مربوط به سهمی‌هایی است که ماکزیمم دارند (چرا؟) و بخشی که به‌ازای $a > ۳$ به‌دست می‌آید، مربوط به سهمی‌هایی است که می‌نیمم دارند.

ولی بهتر است، معادلهٔ مکان را به‌صورت تابعی با ضابطهٔ $y = f(x)$ پیدا کنیم. برای این منظور باید پارامتر a را، با شرط $a \neq ۳$، بین x و y حذف کنیم. در واقع از (۱) روشن است که x و y مستقل از یکدیگر نیستند و به هم بستگی دارند، ولی بستگی آن‌ها به یکدیگر، با واسطهٔ پارامتر a است. باید این واسطه را از میان برداشت و بستگی y نسبت به x را، به‌صورتی مستقیم، به‌دست آورد. برای این منظور، a را برحسب x پیدا می‌کنیم:

$$x = -\frac{a}{۲(a-۳)} \Rightarrow ۲ax - ۶x = -a \Rightarrow a = \frac{۶x}{۲x+۱}$$

و آن را به‌جای a در مقدار y قرار می‌دهیم؛ بعد از تبدیل‌های ساده، به این نتیجه می‌رسیم:

$$y = \frac{۳x^۲ + ۴x - ۱}{۲x+۱} \qquad (۲)$$

و این، همان ضابطهٔ $y = f(x)$، برای مکان هندسی راس سهمی‌هاست: راس سهمی‌های (۱)، به‌ازای مقدارهای مختلف a($a \neq ۳$) روی نمودار تابع با ضابطهٔ (۱) قرار دارند.

گفتیم، وقتی سهمی‌های (۱) دارای ماکزیمم هستند که، در آن‌ها، ضریب $x^۲$ مقداری منفی باشد، یعنی

$$a < ۳ \Rightarrow \frac{۶x}{۲x+۱} < ۳ \Rightarrow \frac{-۳}{۲x+۱} < ۰$$

از آن‌جا $۲x + ۱ > ۰$ و $x > -\frac{۱}{۲}$.

پاسخ. نمودار تابع با ضابطهٔ $y = \frac{۳x^۲ + ۴x - ۱}{۲x+۱}$ به‌ازای $x < -\frac{۱}{۲}$، مسیر راس سهمی‌های (۱) در حالتی است که سهمی ماکزیمم دارد (و روشن است که، بخش دیگر نمودار که برای $x > -\frac{۱}{۲}$ به‌دست می‌آید، مربوط به مکان نقطه‌های می‌نیمم است).

۶) فرض می‌کنیم، سهمی‌های (۱) از نقطهٔ ثابت $A(x_\circ, y_\circ)$ بگذرند. در این صورت باید مختصات نقطهٔ A، به‌ازای هر مقدار دلخواه a، در معادلهٔ کلی سهمی‌ها صدق کند:

$$y_\circ = (a-۳)x_\circ^۲+ax_\circ+a-۱ \Rightarrow (x_\circ^۲+x_\circ+۱)a-(۳x_\circ^۲+۱+y_\circ) = \circ$$

$x_\circ^۲ + x_\circ + ۱$ و $۳x_\circ^۲ + ۱ + y_\circ$ عددهای ثابت‌اند، بنابراین، برابری بالا تنها وقتی به‌ازای همهٔ مقدارهای a برقرار است که این مقدارهای ثابت برابر صفر باشند. ولی $x_\circ^۲ + x_\circ + ۱$ به‌ازای هیچ مقداری از $x_\circ$ نمی‌تواند برابر صفر شود (چرا؟). سهمی‌های (۱) از نقطهٔ ثابتی نمی‌گذرند.

۷) رسم نمودار دشوار نیست. وقتی قرینهٔ نمودار را نسبت به نقطهٔ $w(\circ, -۱)$ رسم کنیم، درواقع هر نقطهٔ M از نمودار به نقطهٔ M' تبدیل می‌شود، به‌نحوی که w وسط پاره‌خط راست MM' باشد. به‌این ترتیب باید داشته باشیم:

$$x_M + x_{M'} = ۲x_w, \quad y_M + y_{M'} = ۲y_w$$

از آن‌جا $x_M = -x_{M'}$ و $y_M = -y_{M'} - ۲$ روی نمودار است و مختصات آن در معادلهٔ نمودار صدق می‌کند، یعنی

$$-y_{M'} - ۲ = -x_{M'}^۲ - ۲x_{M'} + ۱ \Rightarrow y_{M'} = x_{M'}^۲ + ۲x_{M'} - ۳$$

پاسخ. به‌ازای $a = ۲$ به تابع با ضابطهٔ $y = -x^۲ + ۲x + ۱$ می‌رسیم که قرینهٔ نمودار آن نسبت به نقطهٔ $w(\circ, -۱)$ عبارت است از تابع به‌صورت $y = x^۲ + ۲x - ۳$.

۸) اگر معادله‌های سهمی‌ها را در یک دستگاه قرار دهیم، برای محاسبهٔ طول‌های نقطه‌های برخورد دو منحنی به یک معادلهٔ درجهٔ دوم می‌رسیم:

$$\begin{cases} y = (a-۳)x^۲ + ax + a - ۱ \\ y = -۳x^۲ + x - ۱ \end{cases} \Rightarrow ax^۲+(a-۱)x+a = \circ$$

و برای این‌که این معادله، ریشه‌های حقیقی داشته باشد، باید مبین آن نامنفی باشد:

$$\Delta = (a-۱)^۲ - ۴a^۲ \geq ۰ \Rightarrow -۳a^۲ - ۲a + ۱ \geq ۰$$

سه‌جمله‌ای درجه دوم $-۳a^۲ - ۲a + ۱$ دارای دو ریشه است: $a_۱ = -۱$ و $a_۲ = \frac{۱}{۳}$؛ و برای این‌که سه‌جمله‌ای مثبت، یعنی مخالف علامت ضریب درجه دوم باشد، باید مقدار a بین دو ریشه باشد. بنابراین، برای این‌که دو سهمی نقطه‌های برخورد داشته باشند، باید داشته باشیم:

$$-۱ \leq a \leq \frac{۱}{۳}$$

به‌ازای $a = -۱$ و $a = \frac{۱}{۳}$، دو سهمی بر هم مماس‌اند، یعنی دو نقطهٔ برخورد،بر هم منطبق می‌شوند.

x' و x''، طول‌های نقطه‌های A و B، ریشه‌های این معادلهٔ درجه دوم‌اند.

$$ax^۲ + (a-۱)x + a = ۰$$

بنابراین، برای طول نقطهٔ M (وسط پاره‌خط راست AB) داریم:

$$x_M = \frac{۱}{۲}(x_A + x_B) = \frac{۱}{۲}(x' + x'') = -\frac{a-۱}{۲a}$$

چون نقطه‌های A و B روی سهمی $y = -۳x^۲ + x - ۱$ واقع‌اند، بنابراین

$$y_A = -۳x'^۲ + x' - ۱, \quad y_B = -۳x''^۲ + x'' - ۱;$$
$$y_M = \frac{۱}{۲}(y_A + y_B) = \frac{۱}{۲}[-۳(x'^۲ + x''^۲) + (x' + x'') - ۲] =$$

$$= \frac{۱}{۲}[-۳((x' + x'')^۲ - ۲x'x'') + (x' + x'') - ۲] =$$

$$= \frac{۱}{۲}\left[\frac{-۳(a-۱)^۲}{a^۲} + ۶ - \frac{a-۱}{a} - ۲\right] = \frac{۷a-۳}{۲a^۲}$$

به‌این ترتیب، به‌دست می‌آید:

$$M\left(x = -\frac{a-۱}{۲a}, \quad y = \frac{۷a-۳}{۲a^۲}\right)$$

باید پارامتر a را بین مختصات نقطهٔ M حذف کرد:

$$x = -\frac{a-۱}{۲a} \Rightarrow a = \frac{۱}{۲x+۱} \qquad (*)$$

این مقدار را به‌جای a، در y (عرض نقطهٔ M) قرار می‌دهیم، سرانجام به این نتیجه می‌رسیم:

$$y = -۶x^۲ + x + ۲ \qquad (**)$$

نقطهٔ M روی سهمی (**) واقع است. ولی آیا نقطهٔ M در هر نقطه‌ای از نمودار (**) می‌تواند باشد؟

پیش از این به‌شرط $-۱ \leq a \leq \frac{۱}{۳}$ رسیده‌بودیم. درضمن، باتوجه به (*) داریم $a = \frac{۱}{۲x+۱}$. بنابراین باید داشته باشیم:

$$-۱ \leq \frac{۱}{۲x+۱} \leq \frac{۱}{۳}$$

باید جواب این دستگاه نامعادله‌ها را پیدا کنیم. اگر به هر سه جملهٔ این نابرابری‌ها، عدد $\frac{۱}{۳}$ را اضافه کنیم، به‌دست می‌آید:

$$-\frac{۲}{۳} \leq \frac{۱}{۲x+۱} + \frac{۱}{۳} \leq \frac{۲}{۳}$$

که می‌توان آن را به‌ترتیب، تبدیل کرد:

$$-\frac{۲}{۳} \leq \frac{۲(x+۲)}{۳(۲x+۱)} \leq \frac{۲}{۳} \Rightarrow \frac{۴(x+۲)^۲}{۹(۲x+۱)^۲} \leq \frac{۴}{۹} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{۴(x+۲)^۲}{۹(۲x+۱)^۲} - \frac{۴}{۹} \leq ۰ \Rightarrow (x+۲)^۲ - (۲x+۱)^۲ \leq ۰ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ۳(x+۱)(-x+۱) \leq ۰ \Rightarrow x \leq -۱ \text{ یا } x \geq ۱$$

به‌این ترتیب، معادلهٔ مکان هندسی نقطهٔ M را می‌توان این‌طور بیان کرد:

$$y = -۶x^۲ + x + ۲ \quad (x \geq ۱ \text{ یا } x \leq -۱ \text{ با شرط })$$

پاسخ. نقطهٔ M روی بخشی از سهمی $y = -۶x^۲ + x + ۲$ حرکت می‌کند، به‌شرطی که در هر حال قدرمطلق طول این نقطه، بزرگتر از واحد باشد ($|x| > ۱$).

۹) $A(۰, a-۱)$ نقطهٔ برخورد منحنی با محور $y'y$ است. اگر فرض کنیم $B(۱, ۰)$، باید خط راست AB بر منحنی سهمی در نقطهٔ A مماس باشد. معادلهٔ خط راست AB، چنین است:

$$y = -(a-۱)x + a - ۱$$

برای این‌که خط راست AB بر سهمی (۱) مماس باشد، باید دستگاه زیر منجر به معادله‌ای با دو ریشهٔ برابر برای x شود:

$$\begin{cases} y = (a-۳)x^۲ + ax + a - ۱ \\ y = -(a-۱)x + a - ۱ \end{cases}$$

که از آن به‌دست می‌آید:

$$(a-۳)x^۲ + (۲a-۱)x = ۰$$

و این معادله، وقتی دو ریشهٔ برابر دارد که داشته باشیم: $a = \frac{۱}{۲}$. به‌ازای $a = \frac{۱}{۲}$، معادلهٔ سهمی و خط راست مماس بر آن چنین می‌شوند:

$$y = -\frac{۵}{۲}x^{۲} + \frac{۱}{۲}x - \frac{۱}{۲}, \quad y = \frac{۱}{۲}x - \frac{۱}{۲}$$

۱۶. پاسخ. $a(x-۱)(x+۲)(x-۳) = ۰$.

۱۷. الف) برابری $S_n = \frac{a(۱-q^{n+۱})}{۱-q}$ مجموع n جمله از تصاعد هندسی با جملهٔ اول a و قدرنسبت q را به ما می‌دهد. بنابراین

$$\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴} + \ldots + \frac{۱}{۲^n} = \frac{\frac{۱}{۲}\left[۱ - \left(\frac{۱}{۲}\right)^n\right]}{۱ - \frac{۱}{۲}} = ۱ - \left(\frac{۱}{۲}\right)^n$$

این مقدار، به‌اندازهٔ $\left(\frac{۱}{۲}\right)^n$ از واحد کمتر است؛ یعنی باید داشته باشیم:

$$\left(\frac{۱}{۲}\right)^n < \frac{۱}{۱۰۰۰}$$

چون $\frac{۱}{۱۰۰۰} < \frac{۱}{۱۰۲۴}$ و $۲^{۱۰} = ۱۰۲۴$، بنابراین نابرابری اخیر را می‌توان این‌طور نوشت:

$$\left(\frac{۱}{۲}\right)^n \leq \left(\frac{۱}{۲}\right)^{۱۰} \Rightarrow ۲^n \geq ۲^{۱۰} \Rightarrow n \geq ۱۰$$

(اگر دو طرف نابرابری را معکوس کنیم، به‌شرط مثبت بودن دو طرف، جهت نابرابری عوض می‌شود.)

به‌ازای $n = ۱۰$ داریم:

$$\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\ldots+\frac{۱}{۲^۹}+\frac{۱}{۲^{۱۰}}=\frac{۱۰۲۳}{۱۰۲۴}$$

و درنتیجه $\frac{۱}{۱۰۰۰} > \frac{۱}{۱۰۲۴} = ۱-\frac{۱۰۲۳}{۱۰۲۴}$.

ب) اگر از دو طرف نابرابری $\sqrt[n]{۱۰۰۰} < ۱/۰۰۱$ در مبنای ۱۰ لگاریتم بگیریم، به‌دست می‌آید:

$$\frac{۳}{n} < \lg ۱/۰۰۱ = ۰/۰۰۰۴۳ \Rightarrow n > \frac{۳}{۰/۰۰۰۴۳} \approx ۶۹۸۰$$

یعنی برای مثال $\sqrt[۷۰۰۰]{۱۰۰۰} < ۱/۰۰۱$

ج) آزمایش می‌کنیم (محاسبه‌ها تا سه رقم بعد از ممیز):

$$n = ۹:\ \sqrt{۱۰}-\sqrt{۹} = ۳/۱۶۲ - ۳ = ۰/۱۶۲;$$
$$n = ۱۶:\ \sqrt{۱۷}-\sqrt{۱۶} = ۴/۱۲۳ - ۴ = ۰/۱۲۳;$$
$$n = ۲۴:\ \sqrt{۲۵}-\sqrt{۲۴} = ۵ - ۴/۸۹۹ = ۰/۱۰۱;$$
$$n = ۲۵:\ \sqrt{۲۶}-\sqrt{۲۵} = ۵/۰۹۹ - ۵ = ۰/۰۹۹$$

و اگر $\sqrt{۲۶}$ را تا پنج رقم بعد از ممیز محاسبه کنیم:

$$n = ۲۵:\ \sqrt{۲۶}-\sqrt{۲۵} = ۵/۰۹۹۰۱-۵ = ۰/۰۹۹۰۱ < ۰/۰۹۹۱ < ۰/۱$$

برای $n > ۲۵$، مقدار $\sqrt{n+۱}-\sqrt{n}$ باز هم کوچکتر می‌شود. به‌عنوان نمونه، برای $n = ۹۹$

$$\sqrt{۱۰۰}-\sqrt{۹۹} = ۱۰ - ۹/۹۵۰ = ۰/۰۵۰$$

یادداشت. هریک از مساله‌های الف)، ب) و ج)، در ریاضیات معنای خاصی دارند.

مسالهٔ الف) را می‌شناسیم: مجموعی از جمله‌های یک تصاعد هندسی نزولی است (جلد سوم «ریاضیات محاسبه‌ای»، از صفحهٔ ۲۰۲ به بعد را ببینید). می‌دانیم، اگر بی‌نهایت جمله از یک تصاعد هندسی نزولی، به جملهٔ اول $a_۱$ و قدرنسبت $q(|q| < ۱)$ انتخاب کنیم، مجموع همهٔ آن‌ها از دستور

$$S = \frac{a_۱}{۱ - q}$$

به‌دست می‌آید (دستور III را در صفحهٔ ۲۰۶، جلد سوم «ریاضیات محاسبه‌ای» ببینید). یعنی

$$\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۸} + \ldots = \frac{\frac{۱}{۲}}{۱ - \frac{۱}{۲}} = ۱ \qquad (۱)$$

(سه نقطه‌ای که بعد از $\frac{۱}{۸}$ گذاشته شده، به این معناست که جمله‌ها، طبق قاعدهٔ تصاعد تا بی‌نهایت ادامه دارد: تصاعد دارای بی‌نهایت جمله است). بی‌نهایت را در ریاضیات، با نماد ∞ نشان می‌دهند. این نماد را **جون والیس** (Wallis)، ریاضی‌دان انگلیسی که در سال‌های ۱۶۱۶ تا ۱۷۰۳ میلادی زندگی می‌کرد، برای نخستین بار در کتاب مشهور خود «حساب بی‌نهایت‌ها» (۱۶۵۵ میلادی) به کار برد و از آن‌پس در همه‌جا رایج شد.

در ریاضیات، معمول شده است که مجموع (۱) را به‌این صورت بنویسند:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴} + \ldots + \frac{۱}{۲^n}\right) = ۱$$

(بخوانید: حد عبارت داخل پرانتز، وقتی مقدار n به‌سمت بی‌نهایت میل کند، برابر است با ۱).

به‌همین ترتیب، باتوجه به آن‌چه ضمن حل مساله‌های ب) و ج) دیدید می‌توان نوشت:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{۱۰۰۰}\right) = ۱;$$

(بخوانید: حد $\sqrt[n]{۱۰۰۰}$، وقتی n به‌سمت بی‌نهایت میل کند، برابر است با ۱).

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+۱}-\sqrt{n}\right) = ۰$$

(حد $\left(\sqrt{n+۱}-\sqrt{n}\right)$ وقتی n به‌سمت بی‌نهایت میل کند، برابر است با صفر).

۱۸. اگر در یک معادلهٔ دومجهولی x را به $-x$ تبدیل کنیم، تغییری در معادله حاصل نشود، به‌معنای آن است که محور $y'y$، محور تقارن نمودار آن است (چرا؟). همچنین اگر با تبدیل y به $-y$، همان معادلهٔ نخستین به‌دست آید، محور $x'x$ محور تقارن نمودار آن است (چرا؟). سرانجام اگر با تبدیل x به $-x$ و y به $-y$، معادلهٔ نمودار تغییر نکند، مبداء مختصات، مرکز تقارن نمودار است (چرا؟).

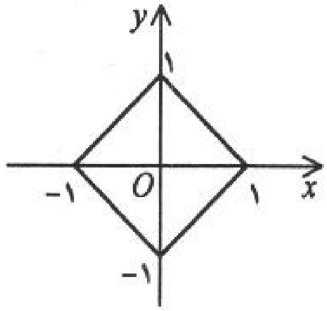
۱) در این معادله، اگر x را به $-x$ یا y را به $-y$ و یا هم x را به $-x$ و هم y را به $-y$ تبدیل کنیم، معادله تغییر نمی‌کند، در واقع

$$|-x| = |x| \text{ و } |-y| = |y|$$

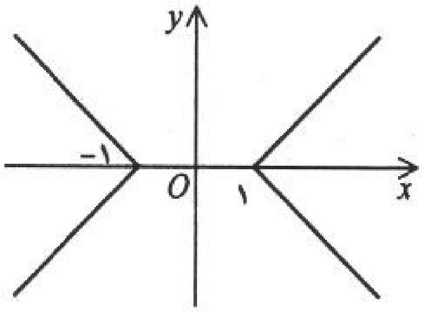
بنابراین کافی است $x \geq ۰$ و $y \geq ۰$ بگیریم (یعنی بخشی از نمودار را که در ربع اول دستگاه محورهای مختصات واقع است، رسم کنیم) و سپس، قرینهٔ آن را نسبت به هریک از محورها و نسبت به مبداء مختصات پیدا کنیم.

به‌ازای $x \geq ۰$ و $y \geq ۰$، به معادلهٔ $x + y = ۱$ می‌رسیم. بخشی از این خط راست که در ربع اول دستگاه محورهای مختصات قرار دارد، نمودار

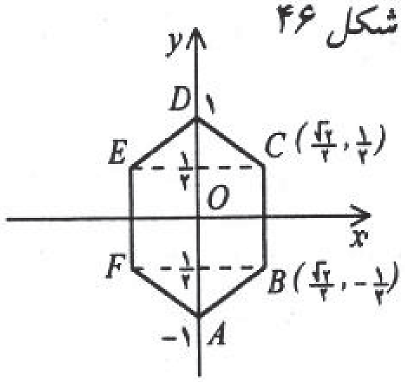
$x + y = ۱$ با شرط‌های $x \geq ۰$ و $y \geq ۰$ است. اگر قرینهٔ این پاره‌خط راست را نسبت به محورها و نسبت به مبداء مختصات پیدا کنیم، نمودار $|x| + |y| = ۱$ به‌دست می‌آید (شکل ۴۵).



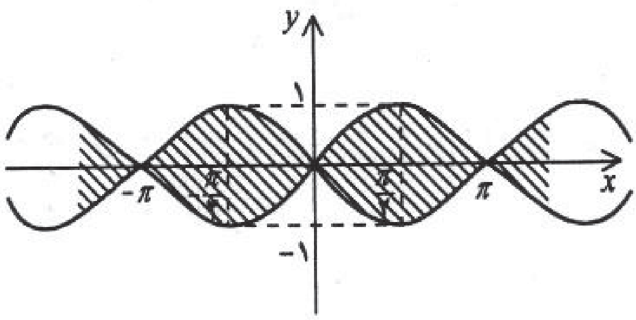
شکل ۴۵



شکل ۴۶



شکل ۴۷



شکل ۴۸

۲) شکل ۴۶ را ببینید.

۳) چون با تبدیل x به $-x$، معادلهٔ مفروض بی‌تغییر می‌ماند، کافی است نمودار را برای $x \geq ۰$ رسم کنیم و سپس قرینهٔ آن را نسبت به محور yها هم در نظر بگیریم. باید نمودار را در سه حالت رسم کنیم (با شرط $x \geq ۰$):

$$۱)\ y \leq -\frac{۱}{۲} : -۲y + ۱ - ۲y - ۱ + ۲\sqrt{۲}x = ۴ \Rightarrow \sqrt{۲}x - ۲y = ۲$$

در این حالت پاره‌خط راست AB از خط راست $\sqrt{۲}x - ۲y = ۲$ به‌دست

می‌آید که در آن $A(۰,-۱)$ و $.B\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲},-\frac{۱}{۲}\right)$

$$۲)\ -\frac{۱}{۲}\leq y\leq\frac{۱}{۲}:\ -۲y+۱+۲y+۱+۲\sqrt{۲}x=۴\Rightarrow x=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

که خط راستی است موازی $y'y$ و از آن پاره‌خط راست BC با این حالت تطبیق می‌کند: $B\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲},-\frac{۱}{۲}\right)$ و $.C\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲},\frac{۱}{۲}\right)$

$$۳)\ y\geq\frac{۱}{۲}:\ ۲y-۱+۲y+۱+۲\sqrt{۲}x=۴\Rightarrow\sqrt{۲}x+۲y=۲$$

که از آن پاره‌خط راست CD، به نمودار ما تعلق دارد: $C\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲},\frac{۱}{۲}\right)$ و $.D(۰,۱)$

اگر قرینهٔ خط شکستهٔ $ABCD$ را نسبت به محور $y'y$ پیدا کنیم، شش‌ضلعی $ABCDEF$ (نمودار معادله) به‌دست می‌آید (شکل ۴۷).

۱۹. برای این‌که حاصل‌ضرب دو پرانتز منفی باشد، باید یکی از پرانتزها مثبت و دیگری منفی باشد. بنابراین به مجموعهٔ دو دستگاه می‌رسیم:

$$\begin{cases} y+\sin x\geq ۰ \\ y-\sin x\leq ۰ \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} y+\sin x\leq ۰ \\ y-\sin x\geq ۰ \end{cases}$$

مختصات نقطه‌های واقع در فاصلهٔ بین نمودارهای دو تابع $y=\sin x$ و $y=-\sin x$، همراه با مختصات نقطه‌های واقع بر خود این نمودارها، در نامعادلهٔ ما صدق می‌کنند (چرا؟) (شکل ۴۸).

۲۰. B چه راست‌گو باشد و چه دروغ‌گو، در هر حال پاسخ می‌دهد: «من راست می‌گویم». بنابراین روشن است که C راست‌گو و D دروغ‌گوست. A باید به C اعتماد کند و پرسش‌های خود را با او در میان بگذارد.

۲۱. ۱) با روش‌های مختلف می‌توان کمترین مقدار a_n را، برای عدد طبیعی n، پیدا کرد.

روش اول. a_n را می‌توان به این صورت تبدیل کرد:

$$a_n = (n^۲ - ۵n + ۶) - ۵ = (n - ۲)(n - ۳) - ۵$$

۵− مقداری است ثابت، بنابراین باید ببینیم کمترین مقدار حاصل‌ضرب $(n-۲)(n-۳)$ در چه حالتی به‌دست می‌آید. آیا این حاصل‌ضرب می‌تواند منفی باشد؟ برای منفی بودن این حاصل‌ضرب، باید یکی از عامل‌ها مثبت و دیگری منفی باشد، یعنی

$$\begin{cases} n - ۲ > ۰ \\ n - ۳ < ۰ \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} n - ۲ < ۰ \\ n - ۳ > ۰ \end{cases}$$

در حالت اول به‌دست می‌آید: $۲ < n < ۳$. ولی بین ۲ و ۳، عددی طبیعی وجود ندارد. در حالت دوم. باید n کوچکتر از ۲ و در عین حال بزرگتر از ۳ باشد که ممکن نیست. بنابراین $(n-۲)(n-۳)$ با شرط $n \in \mathbf{N}$، نمی‌تواند منفی باشد و کمترین مقدار آن صفر است که به‌ازای $n = ۲$ و $n = ۳$ به‌دست می‌آید.

پاسخ. کمترین مقدار u_n برابر است با ۵− که به‌ازای $n = ۲$ یا $n = ۳$ به‌دست می‌آید: $u_۲ = u_۳ = -۵$.

روش دوم. u_n را به‌این ترتیب تبدیل می‌کنیم:

$$u_n = \left(n^۲ - ۵n + \frac{۲۵}{۴}\right) - \frac{۲۵}{۴} + ۱ = \left(n - \frac{۵}{۲}\right)^۲ - \frac{۲۱}{۴}$$

$-\frac{۲۱}{۴}$ عددی ثابت و کمترین مقدار $\left(x - \frac{۵}{۲}\right)^۲$ برابر صفر است (عبارت مجذور کامل، نمی‌تواند برابر عددی منفی باشد). بنابراین، کمترین مقدار

u_n به‌ازای $n = \frac{۵}{۲}$ به‌دست می‌آید. ولی $\frac{۵}{۲}$ عددی طبیعی نیست. نزدیک‌ترین عددهای طبیعی به $\frac{۵}{۲}$، عددهای ۲ و ۳ هستند و $u_۲ = u_۳ = -۵$.

روش سوم. در واقع داریم:

$$n^۲ - ۵n + (۱ - u_n) = ۰$$

که نسبت به n، معادله‌ای درجه دوم است. این معادله، وقتی جواب‌های حقیقی دارد که مبین آن نامنفی باشد:

$$\Delta = ۲۵ - ۴(۱ - u_n) \geq ۰ \Rightarrow u_n \geq -\frac{۲۱}{۴} \qquad (*)$$

ولی مقدار $u_n = -\frac{۲۱}{۴}$ به‌ازای $n = \frac{۵}{۲}$ به‌دست می‌آید (چرا؟) که عددی طبیعی نیست. پس کمترین مقدار u_n به‌ازای نزدیک‌ترین عددهای طبیعی به $\frac{۵}{۲}$، یعنی به‌ازای $n = ۲$ یا $n = ۳$ خواهد بود.

استدلال را به‌صورت دیگری هم می‌توانستیم دنبال کنیم. بنابر نابرابری $(*)$، کمترین مقدار u_n برابر $-\frac{۲۱}{۴}$ است. ولی u_n، باتوجه به طبیعی بودن عدد n، هرگز عددی کسری نمی‌شود (چرا؟). نزدیک‌ترین عدد درست به $-\frac{۲۱}{۴}$، عدد -۵ است که به‌ازای $n = ۲$ یا $n = ۳$ به‌دست می‌آید. خود دنباله چنین است:

$$-۳, -۵, -۵, -۳, ۱, ۷, ۱۵, ۲۵, \ldots$$

۲) u_n مقداری مثبت است و اگر دو طرف برابری را به توان ۲ برسانیم:

$$u_n^۲ = n^۲ - ۴n + ۱۳$$

می‌توانیم آن را شبیه روش‌های مساله ۱) به نتیجه برسانیم. به‌عنوان نمونه:

$$u_n^۲ = (n - ۲)^۲ + ۹ \geq ۹$$

کمترین مقدار $u_n^۲$ برابر ۹ است و به‌ازای $n = ۲$ به‌دست می‌آید.

پاسخ. $u_۲ = ۳$: دنباله چنین است:

$$\sqrt{۱۰}, ۳, \sqrt{۱۰}, \sqrt{۱۳}, ۳\sqrt{۲}, ۵, \sqrt{۳۴}, \ldots$$

۳) دنباله را می‌توان این‌طور نوشت:

$$(u_n - ۱)n^۲ + n + (u_n - ۱) = ۰$$

که نسبت به n، معادله‌ای است درجه دوم و، برای حقیقی بودن ریشه‌ها، باید مبین آن نامنفی باشد:

$$\Delta = ۱ - ۴(u_n - ۱)^۲ = -۴u_n^۲ + ۸u_n - ۳ \geq ۰$$

عبارت درجه دوم (سمت چپ نابرابری)، وقتی مثبت است که مقدار u_n بین دو ریشه باشد (چون ضریب درجه دوم، عددی منفی است). بنابراین باید داشته باشیم:

$$\frac{۱}{۲} \leq u_n \leq \frac{۳}{۲}$$

($\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۳}{۲}$، ریشه‌های سه‌جمله‌ای درجه دوم سمت چپ نابرابری هستند). از این‌جا روشن می‌شود که، کمترین مقدار u_n برابر $\frac{۱}{۲}$ است که به‌ازای $n = ۱$ به‌دست می‌آید (چرا؟).

پاسخ. $u_۱ = \frac{۱}{۲}$. دنباله چنین است:

$$\frac{۱}{۲}, \frac{۳}{۵}, \frac{۷}{۱۰}, \frac{۱۳}{۱۷}, \frac{۲۱}{۲۶}, \frac{۳۱}{۳۷}, \cdots$$

۴) پاسخ. $u_{۱۰} = ۲۰$. چند جملهٔ اول دنباله چنین است:

$$۱۰۱, ۵۲, ۳۶\frac{۱}{۳}, ۲۹, ۲۵, ۲۲\frac{۲}{۳},$$

$$۲۱\frac{۲}{۷}, ۲۰\frac{۱}{۲}, ۲۰\frac{۱}{۹}, ۲۰, ۲۰\frac{۱}{۱۱}, \ldots$$

۵) اگر $n > ۱$ آن‌وقت $n^۲ > n$. بنابراین به‌ازای $n > ۱$، مقدار کسر $\frac{n^۲+۱}{n+۱}$ و درنتیجه u_n از واحد بزرگتر است. تنها به‌ازای $n = ۱$، مقدار u_n برابر واحد می‌شود.

پاسخ. $u_۱ = ۱$. چند جمله از دنباله

$$۱, \sqrt{\frac{۵}{۳}}, \sqrt{\frac{۵}{۲}}, \sqrt{\frac{۱۷}{۵}}, \sqrt{\frac{۱۳}{۳}}, \sqrt{\frac{۳۷}{۷}}, \frac{۱}{۳}\sqrt{۶۵}, \ldots$$

۶) $\sin\frac{n\pi}{۲}$ (برای عددهای طبیعی n) برابر با یکی از سه مقدار ۱، ۰ و ۱− است:

اگر $n = ۲k$، آن‌وقت $\sin\frac{n\pi}{۲} = \sin k\pi = ۰$؛

اگر $n = (۲k+۱)$، آن‌وقت $\sin\frac{(۲k+۱)\pi}{۲} = \sin\left(k\pi + \frac{\pi}{۲}\right)$، که می‌تواند برابر ۱ یا ۱− باشد. در واقع

اگر $k = ۲m$ آن‌وقت $\sin\left(۲mn + \frac{\pi}{۲}\right) = ۱$ و اگر $k = ۲m + ۱$، آن‌وقت $\sin\left(k\pi + \frac{\pi}{۲}\right) = -۱$. بنابراین، اگر $n = ۴m + ۱$، آن‌وقت $\sin\frac{n\pi}{۲} = ۱$ و اگر $n = ۴m + ۳$، آن‌وقت $\sin\frac{n\pi}{۲} = -۱$.

به‌این ترتیب، برای این‌که جمله $۵\sin\frac{n\pi}{۲}$ منفی باشد، کمترین مقدار n برابر ۳ می‌شود و به‌ازای همین مقدار $n = ۳$، کمترین مقدار برای u_n به‌دست می‌آید.

پاسخ. $u_{۳} = -۲$. چند جمله از دنباله.

$$۶, ۲, -۲, ۴, ۱۰, ۶, ۲, ۸, ۱۴, ۱۰, ۶, \ldots$$

۲۲. باتوجه به نابرابری‌های $a + \frac{۱}{a} \geq ۲$ (به‌شرط $a > ۰$) و $a + \frac{۱}{a} \leq -۲$ (به‌شرط $a < ۰$) می‌توان بدون عمل‌های عادی، ریشه‌های هر معادله را پیدا کرد.

اثبات این دو نابرابری بسیار ساده است. اگر $a > ۰$ آن‌وقت

$$a + \frac{۱}{a} \geq ۲ \Rightarrow a^{۲} + ۱ \geq ۲a \Rightarrow (a - ۱)^{۲} \geq ۰$$

که درستی آن روشن است. درضمن معلوم می‌شود که تنها به‌ازای $a = ۱$، برابری $a + \frac{۱}{a} = ۲$ برقرار است.

به‌همین ترتیب، در حالت $a < ۰$ داریم:

$$a + \frac{۱}{a} \leq -۲ \Rightarrow a^{۲} + ۱ \geq -۲a \Rightarrow (a + ۱)^{۲} \geq ۰$$

که باز هم درستی آن روشن است (توجه کنید: وقتی دو طرف نابرابری را در عدد منفی a ضرب کردیم، جهت نابرابری تغییر کرد). درضمن، تنها به‌ازای $a = -۱$ داریم: $a + \frac{۱}{a} = -۲$. اکنون به معادله‌های مسالهٔ ۲۲ می‌پردازیم.

۱) اگر $\frac{x^{۲}}{x^{۲} + x + ۱}$ را، در ذهن خود، a بگیریم، معادله به‌صورت $a + \frac{۱}{a} = ۲$ درمی‌آید. درضمن a مقداری است مثبت، زیرا هم $x^{۲}$ و هم $x^{۲} + x + ۱$، به‌ازای هر مقدار x، مثبت‌اند (چرا؟). بنابراین، اگر معادله ریشه‌ای داشته باشد، برای حالتی است که داشته باشیم $a = ۱$، یعنی

$$\frac{x^{۲}}{x^{۲} + x + ۱} = ۱ \Rightarrow x + ۱ = ۰ \Rightarrow x = -۱$$

آزمایش کنید: $x = -۱$ در معادله صدق می‌کند.

پاسخ. تنها ریشهٔ معادله $x = -۱$ است.

۲) در این‌جا باید داشته باشیم:

$$\frac{x^{۲} + ۱}{x - ۷} = -۱ \Rightarrow x^{۲} + x - ۶ = ۰ \Rightarrow x = ۲, -۳$$

پاسخ. معادله دو ریشه دارد: $x_{۱} = ۲$، $x_{۲} = -۳$.

۲۳. الف) چون $\frac{۱}{(n-۱)n} = \frac{۱}{n-۱} - \frac{۱}{n}$، بنابراین به‌ترتیب داریم:

$$\frac{۱}{۱ \times ۲} = ۱ - \frac{۱}{۲},$$

$$\frac{۱}{۲ \times ۳} = \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۳},$$

$$\frac{۱}{۳ \times ۴} = \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۴},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{۱}{(n-۱)n} = \frac{۱}{n-۱} - \frac{۱}{n}$$

اگر این برابری‌ها را با هم جمع کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\frac{۱}{۱ \times ۲} + \frac{۱}{۲ \times ۳} \times \frac{۱}{۳ \times ۴} + \ldots + \frac{۱}{(n-۱)n} = ۱ - \frac{۱}{n}$$

با بزرگ شدن n، مقدار $\frac{۱}{n}$ کوچک می‌شود و در حالتی که n خیلی بزرگ باشد، مقدار $\frac{۱}{n}$ خیلی کوچک می‌شود (در ریاضیات می‌گویند: وقتی n به‌سمت بی‌نهایت میل کند، $\frac{۱}{n}$ برابر صفر می‌شود). بنابراین

$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}} \left(\frac{۱}{۱ \times ۲} + \frac{۱}{۲ \times ۳} + \ldots + \frac{۱}{(n-۱)n} \right) = \underset{n\to\infty}{\text{حد}} \left(۱ - \frac{۱}{n} \right) = ۱$$

یادداشت. چون $\frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$ ، اگر تعداد محدودی از جمله‌های دنباله را در نظر بگیریم، همیشه حاصل آن، برابر کسری می‌شود که عدد صورت آن یک واحد از عدد مخرج کمتر است. برای مثال

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}=\frac{2}{3};\quad \frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}=\frac{3}{4};\ldots$$

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\ldots+\frac{1}{1000\times 1001}=\frac{1000}{1001}\approx 1$$

ب) روشن است که $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1)n}$ (وقتی مخرج کوچکتر شود، مقدار کسر بیشتر می‌شود). در این نابرابری به‌جای n، به‌ترتیب عددهای از ۲ تا n را قرار می‌دهیم:

$$\frac{1}{2^2} < \frac{1}{1\times 2}$$

$$\frac{1}{3^2} < \frac{1}{2\times 3}$$

$$\frac{1}{4^2} < \frac{1}{3\times 4}$$

....

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1)n}$$

از مجموع این نابرابری‌ها به‌دست می‌آید:

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+$$

$$+\frac{1}{n^2} < \frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\ldots+\frac{1}{(n-1)n}$$

که باتوجه به مسالهٔ الف)، اگر یک واحد به دو طرف نابرابری اضافه کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\frac{۱}{۱^۲}+\frac{۱}{۲^۲}+\frac{۱}{۳^۲}+\ldots+\frac{۱}{n^۲}<۲-\frac{۱}{n}$$

یعنی مجموع سمت چپ نابرابری نمی‌تواند از ۲ بیشتر باشد و

$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\left(۱+\frac{۱}{۲^۲}+\frac{۱}{۲^۳}+\ldots+\frac{۱}{n^۲}\right)\leq ۲$$

در ریاضیات عالی و با استدلالی پیچیده‌تر ثابت می‌کنند:

$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\left(۱+\frac{۱}{۲^۲}+\frac{۱}{۳^۲}+\ldots+\frac{۱}{n^۲}\right)=\frac{\pi^۲}{۶}\approx ۱/۶۴۵$$

۲۴. پاسخ‌ها. ۱) $f(۲)=۳$؛ ۲) $f\left(-\frac{۳}{۴}\right)=-\frac{۱}{۷}$؛

۳) $f\left(\frac{۱}{x}\right)=\frac{۱+x}{۱-x}\ (x\neq ۰)$؛

۴) $f\left(\frac{۲x-۱}{۲x+۱}\right)=۲x\ \left(x\neq -\frac{۱}{۲}\right)$؛ ۵) $f(f(x))=x$.

۲۵. الف) سهمی $y=-x^۲+ax+b$ در نقطهٔ $M(۰,b)$ محور $y'y$ را قطع می‌کند. معادلهٔ خط راستی را می‌نویسیم که از نقطهٔ M بگذرد و ضریب زاویه‌ای برابر m داشته باشد:

$$y=mx+b$$

می‌خواهیم این خط راست با جهت مثبت محور $x'x$ زاویهٔ ۴۵ درجه بسازد، یعنی $m=\tan ۴۵^\circ=۱$

$$y=x+b$$

درضمن این خط راست باید بر سهمی ما مماس باشد؛ یعنی اگر معادله‌های سهمی و خط راست را در یک دستگاه قرار دهیم، به معادله‌ای برسیم که دو ریشهٔ برابر داشته باشد:

$$\begin{cases} y = -x^۲ + ax + b \\ y = x + b \end{cases} \Rightarrow -x^۲+ax+b = x+b \Rightarrow x^۲-(a-۱)x = ۰$$

این معادلهٔ درجه دوم یک ریشهٔ برابر صفر دارد. بنابراین، برای این‌که دو ریشهٔ برابر داشته باشد، باید ریشهٔ دوم آن هم، برابر صفر باشد، یعنی داشته باشیم:

$$a - ۱ = ۰ \Rightarrow a = ۱$$

و معادله سهمی به‌صورت $y = -x^۲ + x + b$ درمی‌آید. بنابه‌فرض مساله، می‌خواهیم عمود بر خط راست $y = x + b$ در نقطهٔ تماس از نقطهٔ برخورد سهمی با محور $x'x$ بگذرد. ضریب زاویهٔ عمود برابر ۱− می‌شود و چون از نقطهٔ تماس گذشته است، معادله‌ای به‌صورت

$$x + y = b$$

پیدا می‌کند که در نقطهٔ $(b, ۰)$ محور $x'x$ را قطع می‌کند. مختصات این نقطه باید در معادلهٔ سهمی صدق کند و از آن‌جا به معادلهٔ

$$-b^۲ + ۲b = ۰ \Rightarrow b = ۰ \text{ یا } b = ۲$$

می‌رسیم. $b = ۰$ را باید کنار بگذاریم، زیرا معادلهٔ سهمی به‌صورت $y = -x^۲ + x$ درمی‌آید که در آن، خود محور $x'x$ از دو نقطهٔ برخورد سهمی با محور طول می‌گذرد و نمی‌تواند ضریب زاویه‌ای برابر ۱− داشته باشد.

پاسخ. $a = ۱$ و $b = ۲$؛ معادلهٔ سهمی $y = -x^۲ + x + ۲$.

ب) معادله‌های سهمی‌ها را در یک دستگاه قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} y = -x^{۲} + x + ۲ \\ y = mx^{۲} \end{cases} \Rightarrow (m+۱)x^{۲} - x - ۲ = ۰ \qquad (۱)$$

دو سهمی وقتی نقطهٔ مشترک دارند که این معادلهٔ درجه دوم، ریشه‌های حقیقی داشته باشد، یعنی داشته‌باشیم:

$$\Delta = ۱ + ۸(m+۱) \geq ۰ \Rightarrow m \geq -\frac{۹}{۸}$$

دو سهمی به‌ازای $m = -\frac{۹}{۸}$ بر هم مماس‌اند، به‌ازای $m > -\frac{۹}{۸}$، یکدیگر را در دو نقطه قطع می‌کنند و به‌ازای $m < -\frac{۹}{۸}$، نقطهٔ برخوردی ندارند. در حالتی که دو سهمی بر هم مماس‌اند، نقطهٔ $T(-۴, -۱۸)$ نقطهٔ تماس آن‌ها است (آزمایش کنید!).

حالت $m \geq -\frac{۹}{۸}$ را در نظر می‌گیریم. نقطه‌های برخورد دو سهمی را A و B می‌نامیم (در حالت $m = -\frac{۹}{۸}$، A و B بر هم منطبق‌اند). مختصات دو نقطهٔ A و B، از حل دستگاه شامل دو معادلهٔ سهمی‌ها محاسبه می‌شود. اگر ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم

$$(m+۱)x^{۲} - x - ۲ = ۰$$

را x' و x'' بنامیم، مختصات نقطه‌های A و B و، درنتیجه، مختصات نقطهٔ P، وسط پاره‌خط راست AB، چنین می‌شود:

$$A \left| \begin{array}{l} x' \\ mx'^{۲} \end{array} \right. , \quad B \left| \begin{array}{l} x'' \\ mx''^{۲} \end{array} \right. ; \quad P \left| \begin{array}{l} x = \frac{۱}{۲}(x' + x'') \\ y = \frac{۱}{۲}m(x'^{۲} + x''^{۲}) \end{array} \right.$$

x' و x'' ریشه‌های معادلهٔ (۱) هستند، یعنی $x' + x'' = \frac{1}{m+1}$ و $x'x'' = -\frac{2}{m+1}$. بنابراین، برای مختصات P داریم:

$$x = \frac{1}{2}(x' + x'') = \frac{1}{2(m+1)};$$
$$y = \frac{1}{2}m(x'^2 + x''^2) = \frac{1}{2}m[(x'+x')^2 - 2x'x''] = \frac{m(4m+5)}{2(m+1)^2}$$

به‌این ترتیب، مختصات نقطهٔ P (که همان معادلهٔ پارامتری نقطهٔ P است)، به‌دست می‌آید:

$$P\left(x = \frac{1}{2(m+1)}, \quad y = \frac{m(4m+5)}{2(m+1)^2}\right)$$

باید بین مختصات نقطهٔ P، پارامتر m را حذف کنیم تا معادلهٔ مکان نقطهٔ P، به‌صورت رابطه‌ای بین x و y به‌دست آید. m را برحسب x محاسبه می‌کنیم:

$$x = \frac{1}{2(m+1)} \Rightarrow m = \frac{1-2x}{2x}$$

و آن را به‌جای m در رابطهٔ y قرار می‌دهیم، بعد از عمل‌های ساده، به‌دست می‌آید:

$$y = (1-2x)(x+2) = -2x^2 - 3x + 2 \qquad (2)$$

برای آزمایش درستی عمل‌ها، باید مختصات نقطهٔ تماس دو سهمی (به‌ازای $m = -\frac{9}{8}$)، یعنی نقطهٔ $(-4, -18)$ در این معادله صدق کند (زیرا وقتی دو سهمی بر هم مماس‌اند، A و B بر هم منطبق می‌شوند و نقطهٔ وسط آن‌ها

یعنی P بر نقطهٔ تماس قرار می‌گیرد). آزمایش نشان می‌دهد که، مختصات این نقطه، در معادلهٔ (۲) صدق می‌کند.

مکان هندسی نقطهٔ P روی نمودار سهمی (۲) واقع است. ولی آیا همهٔ نمودار (۲) جزو مکان است؟ شرط این‌که نقطهٔ P وجود داشته باشد، این است که A و B وجود داشته باشند و A و B به‌شرط $m \geq -\frac{۹}{۸}$ وجود دارند. دیدیم که

$$m = \frac{۱ - ۲x}{۲x} = \frac{۱}{۲x} - ۱$$

بنابراین، برای وجود A و B، باید این نابرابری برقرار باشد:

$$\frac{۱}{۲x} - ۱ \geq -\frac{۹}{۸} \Rightarrow \frac{۱}{۲x} \geq -\frac{۱}{۸} \Rightarrow -۴ \leq x < ۰$$

به‌این ترتیب، معادلهٔ مکان هندسی نقطهٔ P را باید به این صورت نوشت:

$$\begin{cases} y = (۱ - ۲x)(x + ۲) \\ -۴ \leq x < ۰ \end{cases}$$

بخشی از سهمی $y = (۱ - ۲x)(x + ۲)$ که، برای آن، مقدار x بین عددهای ۴− و ۰ باشد، معرف مکان هندسی نقطهٔ P است.

ج) کافی است شعاع دایره را پیدا کنیم و شعاع دایره برابر است با فاصلهٔ مرکز دایره از خط راست مماس:

$$R = |wH| = \frac{|x_w + y_w - ۲|}{\sqrt{۲}} = \frac{|۴ - ۲|}{\sqrt{۲}} = \sqrt{۲}$$

و معادلهٔ دایره چنین است:

$$(x - ۴)^۲ + y^۲ = ۲ \Rightarrow x^۲ + y^۲ - ۸x + ۱۴ = ۰$$

۲۶. برای هر دو عضو کمیسیون، باید قفلی وجود داشته باشد که کلید آن نزد هیچ‌یک از این دو نفر نباشد، زیرا در غیر این‌صورت، دو عضو

کمیسیون پیدا می‌شود که می‌توانند گاوصندوق را باز کنند و این، مخالف فرض مساله است. به‌جز این، این قفل برای هر دو عضو کمیسیون، با هر دو عضو دیگر کمیسیون متفاوت باشد. درواقع، اگر برای دو عضو کمیسیون، قفلی بازنشدنی باشد که برای دو عضو دیگر کمیسیون هم بازشدنی نیست، اگر این چهارعضو کمیسیون با هم جمع شوند، دست‌کم سه نفر خواهند بود (ممکن است یکی از عضوها مشترک باشد) که نمی‌توانند گاوصندوق را باز کنند که باز هم مخالف فرض مساله است. بنابراین، تعداد قفل‌ها نمی‌تواند کمتر از تعداد زوج‌های ممکن، یعنی کمتر از ۱۰ باشد. این ده زوج ممکن، چنین‌اند:

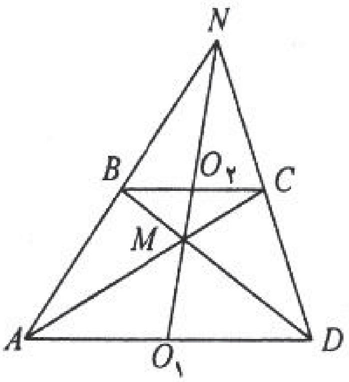
$$۱-۲,\quad ۱-۳,\quad ۱-۴,\quad ۱-۵,\quad ۲-۳,$$
$$۲-۴,\quad ۲-۵,\quad ۳-۴,\quad ۳-۵,\quad ۴-۵$$

کلیدهای ۱۰ قفل گاوصندوق را، باید به‌این ترتیب، بین ۵ عضو کمیسیون تقسیم کرد:

عضو کمیسیون	کلیدها
۱	۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶
۲	۱، ۲، ۵، ۷، ۸، ۹
۳	۱، ۴، ۶، ۷، ۸، ۱۰
۴	۳، ۴، ۵، ۷، ۹، ۱۰
۵	۲، ۳، ۶، ۸، ۹، ۱۰

۲۷. در آغاز، یک پیش‌قضیه را ثابت می‌کنیم.

پیش‌قضیه. اگر ساق‌های ذوزنقه‌ای را ادامه دهیم تا به هم برسند، آن‌وقت خط راستی که از این نقطهٔ برخورد و نقطهٔ برخورد دو قطر ذوزنقه می‌گذرد، قاعده‌های ذوزنقه را نصف می‌کند.



شکل ۴۹

اثبات. ذوزنقهٔ $ABCD$ را در نظر می‌گیریم که در آن، ضلع‌های AD و BC با هم موازی‌اند. M را نقطهٔ برخورد قطرها و N را نقطهٔ برخورد امتداد ساق‌های ذوزنقه می‌گیریم (شکل ۴۹). مثلث‌های NAO_1 و NBO_2 و، همچنین، مثلث‌های NDO_1 و NCO_2 متشابه‌اند و از آن‌جا نتیجه می‌شود:

$$\frac{|AO_1|}{|BO_2|} = \frac{|NO_1|}{|NO_2|} \text{ و } \frac{|DO_1|}{|CO_2|} = \frac{|NO_1|}{|NO_2|}$$

و بنابراین به‌دست می‌آید:

$$\frac{|AO_1|}{|BO_2|} = \frac{|DO_1|}{|CO_2|} \qquad (1)$$

سپس، مثلث‌های MO_1D و MO_2B، همچنین مثلث‌های MO_1A و MO_2C با هم متشابه‌اند؛ از آن‌جا

$$\frac{|DO_1|}{|BO_2|} = \frac{|MO_1|}{|MO_2|} \text{ و } \frac{|AO_1|}{|CO_2|} = \frac{|MO_1|}{|MO_2|}$$

و از مقایسهٔ این دو تناسب به‌دست می‌آید:

$$\frac{|DO_1|}{|BO_2|} = \frac{|AO_1|}{|CO_2|} \qquad (2)$$

و اگر برابری‌های (۱) و (۲) را در هم ضرب کنیم:

$$\frac{|AO_1| \cdot |DO_1|}{|BO_2|^2} = \frac{|AO_1| \cdot |DO_1|}{|CO_2|^2}$$

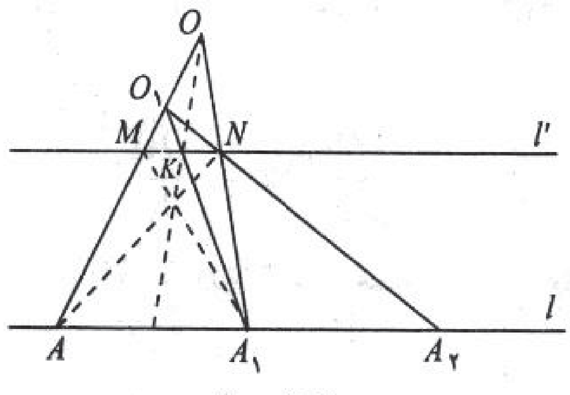
که از آن، به‌سادگی نتیجه می‌شود:

$$|BO_2| = |CO_2| \qquad (3)$$

و اگر تناسب (۱) را باتوجه به برابری (۳) در نظر بگیریم، به‌دست می‌آید:

$$|AO_1| = |DO_1|$$

اکنون به حل مسالهٔ ۲۷ می‌پردازیم و ثابت می‌کنیم، پاره‌خط راستی را که بر یکی از دو خط راست موازی قرار دارد، می‌توان تنها به‌یاری یک خط‌کش، به n بخش برابر تقسیم کرد. دو خط راست l و l' و پاره‌خط راست AA_1 را واقع بر خط راست l در نظر می‌گیریم (شکل ۵۰).



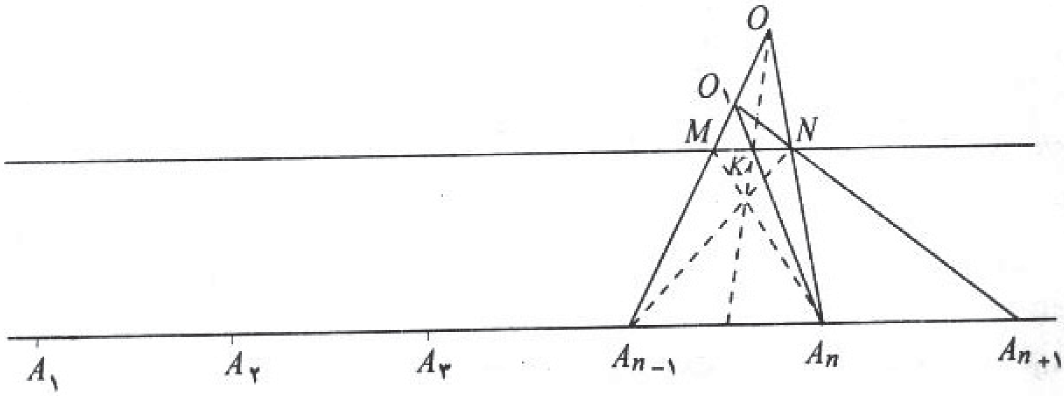
شکل ۵۰

نقطهٔ دلخواه O را روی صفحهٔ l و l' طوری در نظر می‌گیریم که نقطهٔ O و خط راست l در دو سمت خط راست l' واقع باشند. نقطهٔ O را به دو انتهای پاره‌خط راست AA_1 وصل می‌کنیم. اگر نقطه‌های برخورد AO و A_1O را

با خط راست l'، به‌ترتیب، M و N بنامیم، باتوجه به پیش‌قضیه، می‌توانیم نقطهٔ وسط پاره‌خط راست MN را، به‌یاری خط‌کش پیدا کنیم. این نقطه را K می‌نامیم. نقطه‌های A_1 و K را با یک خط راست به هم وصل می‌کنیم؛ این خط راست، خط راست AO را در نقطه‌ای مثل O_1 قطع می‌کند. در این صورت، خط راست O_1N، خط راست l را در نقطهٔ A_2 قطع می‌کند، به‌نحوی که $|AA_1| = |A_1A_2|$. در واقع داریم $\frac{|MK|}{|AA_1|} = \frac{|KN|}{|A_1A_2|}$ و نقطهٔ K وسط پاره‌خط راست MN است.

فرض کنید، $n - 1$ پاره‌خط راست

$$|A_1A_2| = |A_2A_3| = \ldots = |A_{n-1}A_n|$$

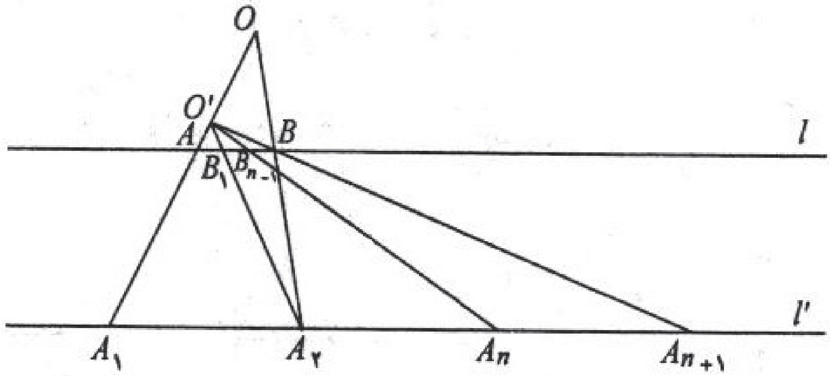


شکل ۵۱

را ساخته باشیم. در این صورت، به‌سادگی می‌توانیم پاره‌خط راست nام را، شبیه حالتی که پاره‌خط راست AA_1 را دو برابر کردیم، به‌یاری یک خط‌کش بسازیم. برای این منظور، باید به‌جای AA_1، پاره‌خط راست $A_{n-1}A_n$ را در نظر گرفت (شکل ۵۱) و پاره‌خط راست A_nA_{n+1} را با طولی برابر آن ساخت. به این ترتیب، پاره‌خط راست A_1A_{n+1} به‌دست می‌آید که طول آن n برابر طول پاره‌خط راست A_1A_2 است:

$$|A_1A_{n+1} = n \cdot |A_1A_2|$$

دو خط راست l و l' و پاره‌خط راست AB واقع بر l را در نظر می‌گیریم. نقطهٔ دلخواه O را در صفحهٔ l و l'، شبیه شکل ۵۲، انتخاب می‌کنیم و نقطه‌های برخورد خط‌های راست OA و OB با خط راست l' را، $A_۱$ و $A_۲$ می‌نامیم. بنابر آن‌چه گفتیم، می‌توانیم n پاره‌خط راست، برابر با $|A_۱A_۲|$، به‌یاری یک خط‌کش بسازیم. $A_{n+۱}$ را انتهای nامین پاره‌خط راست می‌گیریم. نقطهٔ $A_{n+۱}$ را به نقطهٔ B وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا خط راست OA را در نقطهٔ O' قطع کند.



شکل ۵۲

اگر از نقطهٔ O' با رسم نیم‌خط‌های راست به $A_۲$، $A_۳$، ...، A_n وصل کنیم، خط راست l را در نقطه‌های $B_۱$، $B_۲$، ...، $B_{n-۱}$ قطع می‌کنند که پاره‌خط راست AB را به n بخش برابر تقسیم می‌کنند. در واقع، براساس مثلث‌های متشابه (شبیه آن‌چه در پیش قضیه دیدیم)، داریم:

$$\frac{|AB_۱|}{|A_۱A_۲|} = \frac{|B_۱B_۲|}{|A_۲A_۳|} = \ldots = \frac{|B_{n-۱}B|}{|A_nA_{n+۱}|}$$

چون در این نسبت‌ها، مخرج‌ها با هم برابرند، به‌دست می‌آید:

$$|AB_۱| = |B_۱B_۲| = \ldots = |B_{n-۱}B|$$

همهٔ رسم‌ها در این راه‌حل، تنها خط‌های راست است و، بنابراین، توانستیم

پاره‌خط راست AB را، تنها به‌یاری یک خط‌کش، به n بخش برابر تقسیم کنیم.

۲۸. اگر سه سکه داشته باشیم، با یکبار استفاده از ترازو می‌توانیم سکهٔ تقلبی را پیدا کنیم (دو سکه را با هم مقایسه می‌کنیم، اگر وزنی برابر داشته باشند، سکـــهٔ سوم تقلبی است، ولی اگر دو سکه هم‌وزن نباشند، سکهٔ سبک‌تر تقلبی است). اگر با چهار سکه سروکار داشته باشیم، در حالت کلی نمی‌توان سکهٔ تقلبی را با یک بار استفاده از ترازو پیدا کرد. در این حالت می‌توان دو سکه را با هم مقایسه کرد که اگر وزنی برابر داشته باشند، ناچاریم دو سکهٔ دیگر را با هم مقایسه کنیم (یعنی باید دو بار از ترازو استفاده کنیم). می‌توانستیم در آغاز، دو سکه را در یک کفه و دو سکهٔ دیگر را در کفهٔ دیگر ترازو قرار دهیم و معلوم کنیم، سکهٔ تقلبی بین کدام دو سکه است! درنتیجه لازم می‌شود یکبار دیگر از ترازو، برای کشف سکهٔ تقلبی، استفاده کنیم. با همین روش می‌توان استدلال کرد که، برای ۵، ۶، ۷، ۸ یا ۹ سکه، به بیشتر از دو بار استفاده از ترازو نیاز نداریم. به‌عنوان نمونه، برای ۹ سکه، در آغاز ۳ سکه را در یک کفه و ۳ سکهٔ دیگر را در کفهٔ دوم ترازو می‌گذاریم. دو حالت پیش می‌آید: ۱) ترازو در حالت تعادل قرار می‌گیرد، یعنی سکهٔ تقلبی در ۳ سکهٔ باقی مانده است، و می‌توانیم با یک بار استفاده از ترازو، آن را کشف کنیم. ۲) ترازو در تعادل نمی‌ایستد و یکی از گروه‌های سه‌سکه‌ای از دیگری سبک‌تر است، یعنی سکهٔ تقلبی را باید از بین این سه سکه جدا کرد.

با همین روش می‌توان استدلال کرد، اگر تعداد سکه‌ها برابر ۱۰، ۱۱، ...، یا ۲۷ باشد، برای پیدا کردن سکهٔ تقلبی در بین آن‌ها باید سه بار از ترازو استفاده کنیم. فرض کنید $n = ۲۷$ (تعداد سکه‌ها برابر $۳^۳$ است). اگر این ۲۷ سکه را به سه گروه و در هر گروه ۹ سکه تقسیم کنیم، می‌توانیم با یک بار استفاده از ترازو، مشخص کنیم سکهٔ تقلبی در کدام گروه است و، سپس، با تقسیم این ۹ سکه (که شامل سکهٔ تقلبی است) به سه گروه سه

سکه‌ای و یک بار استفاده از ترازو، معلوم کنیم، سکهٔ تقلبی در کدام گروه است! سرانجام، باز هم با یک بار استفاده از ترازو، سکهٔ تقلبی را در بین این سه سکه پیدا کنیم. می‌بینیم، اگر تعداد سکه‌ها را n بگیریم، در حالت $n = ۳^۱$، یک بار، برای $n = ۳^۲$ دو بار، برای $n = ۳^۳$ سه بار استفادهٔ از ترازو را برای کشف سکهٔ تقلبی لازم داریم. درضمن برای $n(۱ + ۳^۱) = ۴$ با یک بار استفاده از ترازو، یا برای $n(۱ + ۳^۲) = ۱۰$ با دو بار استفاده از ترازو و برای $n(۱ + ۳^۳) = ۲۸$ با سه بار استفاده از ترازو نمی‌توان سکهٔ تقلبی را (که سبک‌تر است) پیدا کرد. این وضع، به ما تلقین می‌کند: حداکثر تعداد سکه‌هایی که می‌توان در نظر گرفت تا با n بار استفاده از ترازو، سکهٔ تقلبی کشف شود، برابر است با ۳^n.

آیا به‌واقع استنباط ما درست است؟ فرض کنیم با k بار استفاده از ترازو بتوان سکهٔ تقلبی را بین ۳^k سکه کشف کرد. ثابت می‌کنیم: ۱) با $k + ۱$ بار استفاده از ترازو می‌توان در بین $۳^{k+۱}$ سکه، سکهٔ تقلبی را جدا کرد و ۲) با k بار استفاده از ترازو نمی‌توان سکهٔ تقلبی را در $۳^k + ۱$ سکه پیدا کرد.

استدلال‌ها شبیه قبل است: ۱) $۳^{k+۱}$ سکه را به سه گروه و در هر گروه ۳^k سکه تقسیم می‌کنیم، زیرا

$$۳^{k+۱} = ۳ \times ۳^k$$

با یک بار استفاده از ترازو، می‌توان روشن کرد، سکهٔ تقلبی بین کدام‌یک از این گروه‌هاست. گروهی که شامل سکهٔ تقلبی است از ۳^k سکه تشکیل شده است که برای کشف سکهٔ تقلبی در بین آن‌ها به k بار استفاده از ترازو (طبق فرض) نیاز داریم، روی‌هم باید $k + ۱$ بار از ترازو استفاده کنیم تا سکهٔ تقلبی را بین $۳^{k+۱}$ سکه پیدا کنیم. استدلال مربوط به حکم ۲) را خودتان انجام دهید.

به‌این ترتیب، اگر حداکثر تعداد سکه‌ها، برای استفادهٔ k بار از ترازو،

برابر ۳^k باشد، برای $k + ۱$ بار استفاده از ترازو، می‌توانیم حداکثر $۳^{k+۱}$ سکه داشته باشیم.

دیدیم، برای $n = ۳^۱$ یک بار، برای $n = ۳^۲$ دو بار و برای $n = ۳^۳$ سه بار استفاده از ترازو لازم بود. باتوجه به آن چه ثابت کردیم (عبور از k به $k + ۱$)، نتیجه می‌شود، حداکثر تعداد سکه‌ها برای ۴ بار استفاده از ترازو برابر $n = ۳^۴$، حداکثر تعداد سکه‌ها برای ۵ بار استفاده از ترازو برابر $n = ۳^۵$، ...، و سرانجام، حداکثر تعداد سکه‌ها برای کشف سکهٔ تقلبی در n بار استفاده از ترازو برابر ۳^n است.

یادداشت. روشی را که در این مساله، برای حل به‌کار بردیم، در ریاضیات، **روش استقرای ریاضی** می‌نامند. روش استقرایی (و نه روش استقرای ریاضی)، یعنی روش آزمایشی. به‌ویژه در دانش‌های تجربی از این روش استفاده می‌کنند. فیزیک‌دان یا زیست‌شناس، به دلیل آزمایش‌های خود، قانونی را حدس می‌زند. اگر در آزمایش‌های بعدی حتا یک بار، حدس او تایید نشود، متوجه می‌شود که گمان او درست نبوده است. ولی اگر در آزمایش‌های فراوان بعدی، همه‌جا به همان نتیجه‌ای برسد که از آغاز گمان کرده بود، آن را به‌عنوان یک نظریه و حتا یک قانون می‌پذیرد. ولی در ریاضیات، حتا اگر در هزاران آزمایش، به یک نتیجه برسیم، نمی‌توان به‌درستی آن اطمینان داشت.

عبارت $A = n^۲ + n + ۱۷$ را در نظر بگیرید. در جدول،حاصل این عبارت، به‌ازای عددهای طبیعی از ۱ تا ۱۵ داده شده است:

n	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶
A	۱۷	۱۹	۲۳	۲۹	۳۷	۴۷	۵۹

۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	...
۷۳	۸۹	۱۰۷	۱۲۷	۱۴۹	۱۷۳	۱۹۹	۲۲۷	۲۵۷	...

باتوجه به اتحاد $n^۲ - n + ۱۷ = (n - ۱)^۲ + (n - ۱) + ۱۷$، بافرض $n < ۰$، اگر عددهای درست منفی، از ۱− تا ۱۶− را به‌جای n قرار

دهیم، همان عددها برای A به‌دست می‌آید (آزمایش کنید!). همهٔ عددهایی که برای A در این آزمایش‌ها به‌دست آمده‌اند (اگر عددهای درست از ۱۶− تا ۱۵ را در نظر بگیریم، روی‌هم ۳۲ آزمایش)، همه‌جا برای A، عددی اول به‌دست آمده است. آیا این یک قانون است؟ آیا حاصل عبارت A، به‌ازای هر عدد درست n، عددی اول می‌شود؟ نه! روشن است که به‌ازای $n = ۱۷$ یا $n = -۱۷$. حاصل عبارت A بر ۱۷ بخش‌پذیر است:

$$n = ۱۷: \ A = ۱۷^۲ + ۱۷ + ۱۷ = ۱۷(۱۷ + ۱ + ۱) = ۱۷ \times ۱۹$$
$$n = -۱۷: \ A = (-۱۷)^۲ - ۱۷ + ۱۷ = ۱۷^۲$$

و بنابراین، عددی اول نیست. به‌جز این، عبارت

$$A = n^۲ + n + p$$

به‌شرط $n \in \mathbf{N}$ و $p \in \mathbf{N}$، همیشه به‌ازای $n = p - ۱$، مجذور کامل و عددی مرکب است:

$$n = p - ۱: \ A = (p - ۱)^۲ + (p - ۱) + p = p^۲$$

در ریاضیات نمی‌توان با چند آزمایش (هرقدر تعداد آن‌ها زیاد باشد)، حکمی را نتیجه گرفت.

پس چه باید کرد؟ به‌ویژه، وقتی با عددهای طبیعی سروکار داریم، برای اثبات حکم، باید از دو مرحله گذشت:

۱) کوچکترین عدد طبیعی را پیدا کنیم که به‌ازای آن، حکم مساله درست است؛ ۲) فرض کنیم، حکم مساله برای $n = k$ درست است و، با تکیه بر آن، ثابت کنیم، برای $n = k + ۱$ هم درست است. در این‌صورت، حکم مساله، برای همهٔ عددهای طبیعی n، که از کوچکترین عدد آزمایشی ما بزرگتر باشد، درست است.

مثال. قطر چندضلعی کوژ را پاره‌خط راستی می‌نامیم که دو راس غیرمجاور چندضلعی را به هم وصل کرده باشد. با این تعریف، می‌خواهیم تعداد قطرهای یک nضلعی را پیدا کنیم.

حل. برای حل مساله، در آغاز، باید برای رابطهٔ تعداد قطرهای یک nضلعی، به یک حدس برسیم. nضلعی برای $n < ۳$ معنا ندارد. کمترین تعداد ضلع‌های یک nضلعی برابر است با ۳. سه‌ضلعی قطری ندارد، یعنی تعداد قطرهای آن برابر صفر است. پس رابطهٔ مربوط به تعداد قطرهای nضلعی، باید چنان باشد که به‌ازای $n = ۳$ برابر صفر شود، یعنی اگر تعداد قطرهای nضلعی را $f(n)$ بنامیم، باید داشته باشیم: $f(۳) = ۰$. به‌این ترتیب، در $f(n)$، عامل $n - ۳$ وجود دارد، یعنی

$$f(n) = (n - ۳) \cdot \varphi(n)$$

$\varphi(n)$ را چگونه پیدا کنیم. چهارضلعی را در نظر می‌گیریم. چهارضلعی دو قطر دارد، پس $\varphi(n)$ باید چنان باشد که $f(۴)$ برابر ۲ درآید. حالت‌های مختلفی ممکن است در نظر گرفت:

$$f(n) = ۲(n-۳), \quad f(n) = (n-۲)(n-۳), \quad f(n) = \frac{n}{۲}(n-۳),$$

در هر سه‌حالتی که در نظر گرفته‌ایم، به‌دست می‌آید: $f(۴) = ۲$. ولی کدام‌یک؟ و شاید هیچ‌کدام!

پنج‌ضلعی دارای ۵ قطر است و این، تنها در رابطهٔ آخر از سه رابطه حدسی، یعنی $f(n) = \frac{n}{۲}(n - ۳)$ صدق می‌کند. احتمال می‌دهیم، رابطه‌ای که برای تعیین تعداد قطرهای nضلعی، در جست‌وجوی آن هستیم، همین رابطه باشد:

$$f(n) = \frac{n}{۲}(n - ۳) \qquad (۱)$$

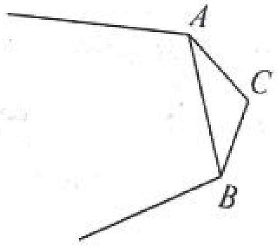
این رابطه به‌ازای $n = ۳$، $n = ۴$ و $n = ۵$، پاسخ درست می‌دهد. اکنون برای اطمینان باید ثابت کنیم، اگر رابطهٔ (۱) برای $n = k$ درست باشد، یعنی اگر

$$f(k) = \frac{k}{۲}(k - ۳) \qquad (۲)$$

آن‌وقت، برای $n = k + ۱$ هم درست است، یعنی با فرض درستی رابطهٔ (۲) برای تعداد قطرهای یک kضلعی، ثابت کنیم، برای $(k + ۱)$ضلعی داریم:

$$f(k + ۱) = \frac{k + ۱}{۲}[(k + ۱) - ۳] = \frac{k + ۱}{۲}(k - ۲)$$

(در دو طرف برابری k را به $k + ۱$ تبدیل کردیم).



شکل ۵۳

یک kضلعی در نظر می‌گیریم و یکی از ضلع‌های آن را AB می‌نامیم (شکل ۵۳). با انتخاب نقطهٔ C و وصل پاره‌خط‌های راست AC و BC، kضلعی به $k + ۱$ضلعی تبدیل می‌شود. در $k + ۱$ضلعی، AB (که در kضلعی، ضلع بود) به‌صورت یکی از قطرها درمی‌آید. به‌جز آن باید قطرهایی را هم که از راس C می‌گذرند به‌حساب آورد. از این راس $k - ۲$ قطر $k + ۱$ضلعی می‌گذرد (چرا؟). بنابراین، برای $k + ۱$ضلعی، این قطرها را داریم:

۱) $\frac{k}{۲}(k-۳)$ قطر مربوط به kضلعی (همهٔ آن‌ها قطرهای $k+۱$ضلعی هم هستند)؛

۲) قطر AB (که در kضلعی، ضلع بود)؛

۳) $k-۲$ قطر تازه (که از راس C می‌گذرد).

بنابراین، بافرض $f(k)=\frac{k}{۲}(k-۳)$، به‌دست می‌آید:

$$f(k+۱)=\frac{k}{۲}(k-۳)+۱+(k-۲)=\frac{۱}{۲}(k^۲-k-۲)=\frac{k+۱}{۲}(k-۲)$$

حکم ثابت شد. رابطهٔ تعیین تعداد قطرهای یک nضلعی چنین است:

$$f(n)=\frac{n}{۲}(n-۳)$$

۲۹. اگر در رابطهٔ فرض، x را به $\frac{۱}{x}$ تبدیل کنیم، به‌دست می‌آید:

$$f\left(۱-\frac{۱}{x}\right)+f(x)=\frac{۱}{x} \qquad (۱)$$

اکنون فرض می‌کنیم $t=x-۱$ یا $x=۱-t$ و در رابطهٔ فرض قرار می‌دهیم:

$$f(t)+f\left(\frac{۱}{۱-t}\right)=۱-t$$

که با تبدیل t به x به‌دست می‌آید:

$$f(x)+f\left(\frac{۱}{۱-x}\right)=۱-x \qquad (۲)$$

سرانجام، فرض می‌کنیم $\frac{۱}{۱-t}=x-۱$ یا $x=\frac{t}{t-۱}$ که در این صورت

$$\frac{۱}{x}=\frac{t-۱}{t}=۱-\frac{۱}{t}$$

در رابطهٔ فوق $\frac{۱}{۱-t} = x - ۱$ و $\frac{۱}{t} - ۱ = \frac{۱}{x}$ قرار می‌دهیم و، سپس، t را به x تبدیل می‌کنیم:

$$f\left(\frac{۱}{۱-x}\right) + f\left(۱ - \frac{۱}{x}\right) = \frac{x}{x-۱} \qquad (۳)$$

اگر $X = f(x)$، $Y = f\left(۱-\frac{۱}{x}\right)$ و $Z = f\left(\frac{۱}{۱-x}\right)$ بگیریم، از رابطه‌های (۱) و (۲) و (۳) به این دستگاه می‌رسیم:

$$\begin{cases} X + Y = \frac{۱}{x} \\ X + Z = ۱ - x \\ Z + Y = \frac{x}{x-۱} \end{cases}$$

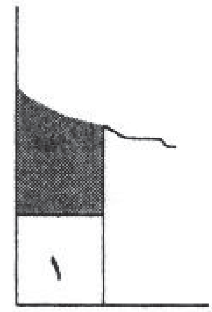
اگر معادلهٔ سوم را از معادلهٔ دوم این دستگاه کم کنیم، نتیجه می‌شود:

$$X - Y = \frac{x^{۲} - x + ۱}{۱ - x}$$

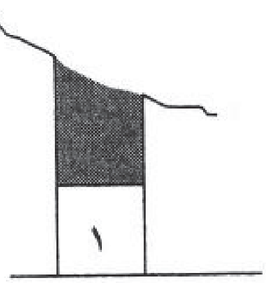
که اگر آن را با معادلهٔ اول دستگاه جمع کنیم، مقدار X، یعنی $f(x)$ به‌دست می‌آید:

$$f(x) = \frac{x^{۳} - x^{۲} + ۱}{۲x(۱-x)}$$

۳۰. از روش برهان خُلف استفاده می‌کنیم. فرض کنید با کنار هم گذاشتن پنج مربع دوبه‌دو متفاوت، بتوان یک مستطیل ساخت. مربع‌ها را، از کوچک به بزرگ، با شماره‌های از ۱ تا ۵ مشخص می‌کنیم. سه حالت ممکن است پیش آید:



شکل ۵۴

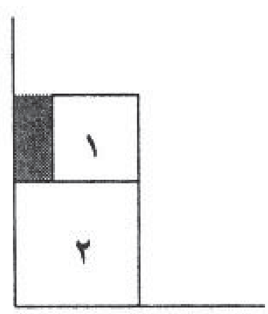


شکل ۵۵

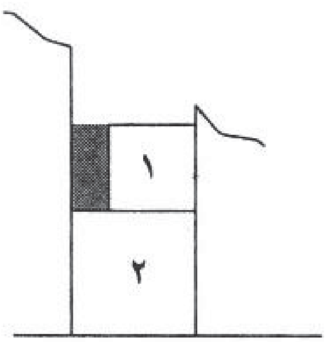
۱) مربع ۱ در یکی از گوشه‌های مستطیل قرار گرفته باشد (شکل ۵۴). در این صورت، باید مربع دیگری با ضلعی بزرگتر از ضلع مربع ۱، به آن چسبیده باشد. درنتیجه بخشی از مستطیل پیدا می‌شود (بخش هاشور خورده در شکل ۵۴)، که در آن نمی‌توان مربعی بزرگتر از مربع ۱ قرار داد.

۲) مربع ۱، چسبیده به ضلع مستطیل قرار دارد (شکل ۵۵). در این صورت، در دو طرف مربع ۱ و چسبیده به همان ضلع مستطیل، باید دو مربع بزرگتر واقع باشند. دوباره بخشی از مستطیل (بالای مربع ۱ و بین دو مربع کناری) پدید می‌آید که نمی‌توان آن را با مربعی بزرگتر از مربع ۱ پر کرد.

۳) مربع ۱، جایی در میان مستطیل قرار دارد (شکل ۵۶). در این حالت، به‌ناچار باید با مربع ۲ مجاور باشد، زیرا هریک از ضلع‌های مربع ۱ باید با یکی از چهار مربع دیگر مجاور باشد و، درضمن، دو ضلع مربع ۱ نمی‌تواند مجاور ضلع یکی از چهار مربع باشد.



شکل ۵۶



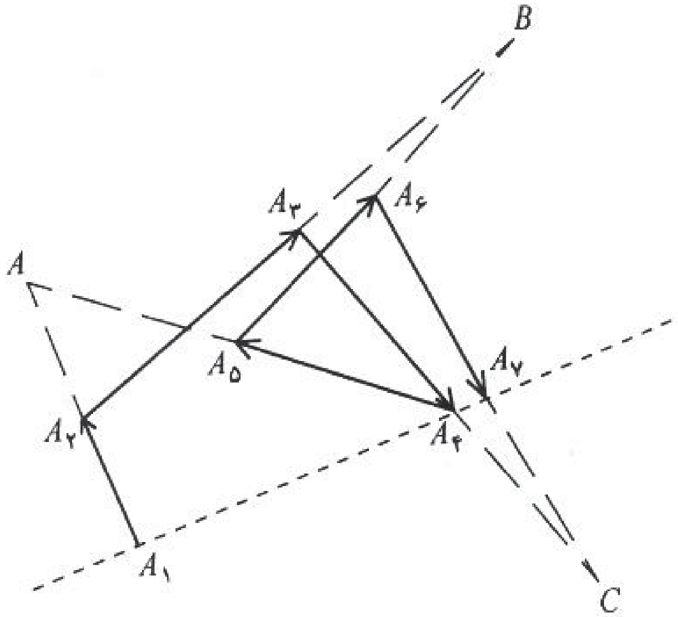
شکل ۵۷

اگر مربع ۲ را طوری در نظر بگیریم که هیچ‌یک از ضلع‌های آن، منطبق بر ضلعی از مستطیل نباشد، آن‌وقت ضلعی از مربع ۲ که روبه‌روی ضلع چسبیده به مربع ۱ قرار دارد، باید چسبیده به یکی از سه مربع باقی‌مانده باشد، در حالی که مربع‌های ۳، ۴ و ۵ دور مربع ۱ را گرفته‌اند و نمی‌توانند مجاور این ضلع مربع ۲ باشند. به‌این ترتیب، مربع ۲ باید در گوشهٔ مستطیل و چسبیده به دو ضلع آن باشد که، در این صورت، بین ضلعی از مربع ۱ و ضلع مستطیل، فضایی به‌وجود می‌آید که نمی‌توان آن را با مربع دیگری پر کرد (همهٔ آن‌ها، ضلعی بزرگتر از ضلع مربع ۲ دارند؛ شکل ۵۶ را ببینید).

اکنون فرض می‌کنیم، ضلع مربع ۲ چسبیده به ضلع مستطیل باشد (شکل ۵۷) در این‌صورت، باید دو مربع دیگر از دو طرف به مربع ۲ چسبیده باشند و این دو مربع، نمی‌توانند هردو، مجاور مربع ۱ باشند، زیرا فاصلهٔ بین آن‌ها، از طول ضلع مربع ۱ بیشتر است.

همهٔ حالت‌های ممکن را در نظر گرفتیم و همه‌جا به تناقض رسیدیم. یعنی فرض ما نادرست است و با پنج مربع دوبه‌دو متفاوت، نمی‌توان یک مستطیل ساخت.

۳۱. محل زندگی دوستان فرهاد را، با نقطه‌های A و B و C و محل زندگی خود او را نقطهٔ A_1 می‌گیریم (شکل ۵۸). اگر A_2 را وسط پاره‌خط راست A_1A، A_3 را وسط پاره‌خط راست A_2B، A_4 را وسط پاره‌خط راست A_3C و غیره بگیریم، فرهاد روی خط شکستهٔ $A_1A_2A_3A_4\ldots$ حرکت می‌کند. ثابت می‌کنیم، نقطه‌های A_1، A_4، A_7، ...، A_{3n+1}، ... در یک امتدادند.



شکل ۵۸

پاره‌خط راست A_2A_5 که وسط دو ضلع از مثلث A_1AA_4 را به هم پیوسته است، با A_1A_4 موازی است و طولی برابر نصف طول پاره‌خط راست A_1A_4 دارد. به همین ترتیب، در مثلث A_2BA_5، پاره‌خط راست A_3A_6 موازی با A_2A_5 است و طولی برای نصف طول آن دارد. سرانجام، از مثلث A_3CA_6 روشن می‌شود که پاره‌خط راست A_4A_7 با A_3A_6 موازی است و طولی برابر نصف طول آن دارد. مقایسهٔ این نتیجه‌ها، نشان می‌دهد که دو پاره‌خط راست A_1A_4 و A_4A_7 روی یک خط راست قرار دارند و، درضمن، طول پاره‌خط راست A_4A_7، $\frac{1}{8}$ طول پاره‌خط راست A_1A_4 است.

با روشی مشابه، می‌توان ثابت کرد که پاره‌خط راست A_7A_{10} در امتداد A_4A_7؛ پاره‌خط راست $A_{10}A_{13}$ در امتداد پاره‌خط راست A_7A_{10} قرار دارند و غیره.

به این ترتیب، نقطه‌های A_1، A_4، A_7، ...، A_{3n+1}، ... روی یک خط راست‌اند و درضمن، فاصلهٔ هر دو نقطهٔ متوالی، $\frac{1}{8}$ فاصلهٔ دو نقطهٔ

متوالی پیش از آن است، یعنی فاصلهٔ بین این نقطه‌ها، یک تصاعد هندسی نزولی با قدرنسبتی برابر $\frac{۱}{۸}$ تشکیل می‌دهند. اگر خط راست $A_۱A_۴A_۷\ldots$ را محوری با مبداء نقطهٔ $A_۱$ در نظر بگیریم و طول پاره‌خط راست $A_۱A_۴$ را واحد انتخاب کنیم، آن‌وقت مختص نقطهٔ $A_{۳n+۱}$ روی این محور، چنین می‌شود:

$$x_n = ۱ + \frac{۱}{۸} + \frac{۱}{۸^۲} + \ldots + \frac{۱}{۸^{n-۱}} = \frac{۱ - \left(\frac{۱}{۸}\right)^n}{۱ - \frac{۱}{۸}}$$

(x_n مختص نقطه $A_{۳n+۱}$ است). هرچه n بزرگتر شود، مقدار $\left(\frac{۱}{۸}\right)^n$، با سرعتی زیاد، کوچکتر می‌شود و درنتیجه

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{۸}{۷}$$

(در واقع، $\frac{۸}{۷}$ مجموع همهٔ جمله‌های تصاعد نزولی با جملهٔ اول ۱ و قدرنسبت $\frac{۱}{۸}$ است).

به‌این ترتیب، نوع حرکت فرهاد به‌گونه‌ای است که نقطه‌های $A_۱$، $A_۴$، $A_۷$، ...، $A_{۳n+۱}$، ... به‌سرعت به نقطهٔ M (با مختص $\frac{۸}{۷}$ روی امتداد $AA_۴$) نزدیک می‌شود. به‌همین ترتیب، می‌توان ثابت کرد، نقطه‌های

$$A_۲, A_۵, A_۸, \ldots, A_{۳n+۲}, \ldots$$

به‌سرعت به نقطه‌ای مانند N و نقطه‌های

$$A_۳, A_۶, A_۹, \ldots, A_{۳n}$$

به‌سرعت به نقطه‌ای مثل P نزدیک می‌شوند. اگر فرهاد، بارها و بارها، نوع حرکت خود را تکرار کند، بعد از اندک زمانی، در عمل، به حرکت روی محیط مثلث MNP می‌افتد.

اکنون تلاش کنید، خودتان به این دو پرسش پاسخ دهید:

۱) شبیه نقطهٔ M، به‌یاری محاسبه، جای نقطه‌های N و P را مشخص و مثلث MNP را روی شکل رسم کنید.

۲) ثابت کنید، جای نقطه‌های M، N و P، به نقطهٔ $A_۱$ (منزل فرهاد، یعنی نقطهٔ آغاز حرکت) بستگی ندارد و تنها به‌جای نقطه‌های A، B و C (منزل دوستان فرهاد) مربوط است.

بررسی تابع

۳۲. برای این‌که بدانیم خط راست نسبت به دایرهٔ مفروض چه وضعی دارد، باید فاصلهٔ مرکز دایره از خط راست را محاسبه کنیم. اگر این فاصله از شعاع دایره کوچکتر باشد، خط راست دایره را در دو نقطه قطع می‌کند؛ اگر این فاصله برابر شعاع دایره باشد، خط راست بر دایره مماس است؛ و سرانجام، اگر فاصلهٔ مرکز دایره از خط راست بزرگتر از طول شعاع دایره باشد، خط راست دایره را قطع نمی‌کند و در بیرون آن واقع است.

مرکز دایرهٔ $x^۲ + y^۲ = ۳۶$، مبداء مختصات و طول شعاع دایره برابر ۶ است.

۱) فاصلهٔ مرکز دایره از خط راست $x - ۲y + ۵ = ۰$ چنین است:

$$|OH| = \frac{|۰ - ۲ \times ۰ + ۵|}{\sqrt{۱^۲ + ۲^۲}} = \frac{۵}{\sqrt{۵}} = \sqrt{۵}$$

و چون $۶ > \sqrt{۵}$، بنابراین خط راست $x - ۲y + ۵ = ۰$ دایره را در دو نقطه قطع می‌کند.

اگر بخواهیم نقطه‌های برخورد این خط راست با دایره را به‌دست آوریم،

باید دستگاه شامل معادله‌های خط راست و دایره را حل کنیم:

$$\begin{cases} x^{۲}+y^{۲}=۳۶ \\ x-۲y+۵=۰ \end{cases} \Rightarrow A \left| \begin{array}{l} \frac{۶}{\sqrt{۵}}-۱ \\ ۲+\frac{۳}{\sqrt{۵}} \end{array} \right. , \quad B \left| \begin{array}{l} -\left(\frac{۶}{\sqrt{۵}}+۱\right) \\ ۲-\frac{۳}{\sqrt{۵}} \end{array} \right.$$

۲) خط راست $۵x-۱۲y+۲۶=۰$ دایره را در دو نقطه قطع می‌کند؛

۳) خط راست $۳x-۴y-۳۰=۰$ در نقطهٔ $\left(\frac{۱۸}{۵},-\frac{۲۴}{۵}\right)$ بر دایره مماس است.

۴) خط راست $x+y=۱۷$ دایره را قطع نمی‌کند.

۳۳. مماس بر دایره، در نقطهٔ تماس، بر شعاعی که از نقطهٔ تماس می‌گذرد، عمود است. $T(۱,-۲)$ نقطهٔ تماس و $O(۰,۰)$ مرکز دایره است، بنابراین ضریب زاویه خط راستی که از مرکز دایره و نقطهٔ تماس می‌گذرد چنین است:

$$m_{OT}=\frac{y_T-y_O}{x_T-x_O}=\frac{-۲-۰}{۱-۰}=-۲$$

ضریب زاویهٔ مماس، عکس قرینه این مقدار و برابر $\frac{۱}{۲}$ است. از خط راست مماس، یک نقطه و ضریب زاویهٔ آن در دست است و معادلهٔ آن به‌سادگی به‌دست می‌آید ($x-۲y=۵$).

۲) کافی است بین معادله‌های دو دایره جمله‌های درجه دوم را حذف کنیم تا معادلهٔ وتر مشترک دو دایره به‌دست آید.

پاسخ. $x+y=۴$.

یادداشت. چون در معادلهٔ دایره ضریب‌های $x^{۲}$ و $y^{۲}$ برابرند، بین معادله‌های هر دو دایره‌ای، می‌توان $x^{۲}$ و $y^{۲}$ را حذف کرد. ولی این، به‌معنای آن نیست که دو دایره یکدیگر را قطع می‌کنند و وتر مشترک دارند. مثلاً دو دایرهٔ به معادله‌های $x^{۲}+y^{۲}=۱$ و $x^{۲}+y^{۲}-۶y+۸=۰$ یکدیگر

را قطع نمی‌کنند، ولی با حذف $x^۲$ و $y^۲$ در بین معادله‌های آن‌ها به معادلهٔ $y = \frac{۳}{۲}$ می‌رسیم و روشن است که خط راست $y = \frac{۳}{۲}$ معادلهٔ وتر مشترک آن‌ها نیست. البته اگر بدانیم دو دایره یکدیگر را قطع می‌کنند، آن‌وقت با حذف $x^۲$ و $y^۲$ بین معادله‌های آن‌ها، معادلهٔ خط راست وتر مشترک به‌دست می‌آید.

بنابراین، باید آزمایش کرد، آیا دو دایره یکدیگر را قطع می‌کنند یا نه؟ در مسالهٔ ما، یکی از دایره‌ها به مرکز مبداء مختصات دیگری به مرکز $w(۵, ۵)$ است، یعنی فاصلهٔ بین دو مرکز برابر $۵\sqrt{۲}$ می‌شـــود، و $۵\sqrt{۲}$ ازمجموع شعاع‌های دو دایره، یعنی $\sqrt{۱۰} + \sqrt{۲۰}$ کوچکتر است و دو دایره یکدیگر را قطع می‌کنند. (نابرابری $۵\sqrt{۲} < \sqrt{۲۰} + \sqrt{۱۰}$ را خودتان ثابت کنید). دو دایره یکدیگر را در نقطه‌های $A(۳, ۱)$ و $B(۱, ۳)$ قطع می‌کنند (آزمایش کنید!).

۳) **پاسخ.** $x + y + ۸ = ۰$

۴) **پاسخ.** $x + ۲y - ۵ = ۰$.

۵) سهمی $y = -۳x^۲ + ۱۲x - ۹$ به راس $M(۲, ۳)$ و سهمی $y = x^۲ + ۱$ بـــه راس $N(۰, ۱)$ است (چرا؟) و معادلهٔ خط راستی که از M و N می‌گذرد به‌سادگی به‌دست می‌آید ($y = x + ۱$).

۳۴. راهنمایی. اگر دو خط راست با هم زاویه‌ای برابر α بسازند، بین ضریب زاویه‌های دو خط راست (m و m') و زاویهٔ α، این بستگی وجود دارد:

$$\tan\alpha = \pm\frac{m - m'}{۱ + mm'}$$

(از نقطه‌ای واقع بر یک خط راست، دو خط راست می‌توان رسم کرد که با اولی زاویه‌ای برابر α بسازند).

پاسخ. $y = ۹x + ۱۷$، $۵x + ۹y = ۷۱$، $۹x - y = ۶$، $x + ۹y + ۱۱ = ۰$.

۳۵. پاسخ. $۳x - ۷y + ۱۹ = ۰$، $۲x - y + ۹ = ۰$.

۳۶. پاسخ. مختصات سه راس مثلث $A(-۳, ۶)$، $B(-۱, ۱۰)$ و $C(-۵, ۱۰)$ و مساحت مثلث ۸ واحد مربع است.

۳۷. وقتی محور oy محور تقارن سهمی باشد، معادلهٔ آن به‌صورت $y = ax^۲ + b$ است (زیرا باید مقدار y، با تبدیل x به $-x$ تغییر نکند). مختصات نقطه‌های A و B در معادلهٔ سهمی صدق می‌کنند که از آن‌جا مقدارهای a و b و درنتیجه معادلهٔ سهمی به‌صورت $y = x^۲ + ۱$ به‌دست می‌آید. راس این سهمی در نقطهٔ $S(۰, ۱)$ قرار دارد (چرا؟). برای پیدا کردن دو راس دیگر مثلث، معادله‌های سهمی و خط راست را با هم حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} y = x^۲ + ۱ \\ y = x + ۷ \end{cases} \Rightarrow M \left| \begin{matrix} -۲ \\ ۵ \end{matrix} \right. \text{ و } N \left| \begin{matrix} ۳ \\ ۱۰ \end{matrix} \right.$$

اگر MN را قاعدهٔ مثلث و عمود وارد از S بر MN را SH (ارتفاع مثلث) بگیریم، داریم:

$$|MN| = ۵\sqrt{۲} \text{ و } |SH| = ۳\sqrt{۲}$$

درنتیجه S، مساحت مثلث برابر $\frac{۱}{۲} \times ۵\sqrt{۲} \times ۳\sqrt{۲}$ یا ۱۵ واحد مربع می‌شود.

۳۸. پاسخ. $f(۰) = ۱۱$، $f\left(\frac{۱}{۲}\right) = ۹$، و $f(a) = ۲a^۲ - ۵a + ۱۱$

$$f(b+۳) = ۲(b+۳)^۲ - ۵(b+۳) + ۱۱ = ۲b^۲ + ۷b + ۱۴$$

۳۹. ۱) روشن است که $x \in \mathbf{R}$. برای پیدا کردن برد تابع، آن را این‌طور می‌نویسیم:

$$y = (x-۳)^۲ + ۳ \Rightarrow y \geq ۳$$

۲) $x \in \mathbf{R}$ (مخرج کسر نمی‌تواند برابر صفر باشد). داریم:

$$y = \frac{۱}{\left(x + \frac{۱}{۲}\right)^{۲} + \frac{۳}{۴}}$$

مخرج کسر از $\frac{۳}{۴}$ کوچکتر نیست، بنابراین خود کسر از $\frac{۴}{۳}$ بزرگتر نیست و برای برد تابع داریم:

$$۰ < y \leq \frac{۴}{۳}$$

۳) $x \leq ۰$ یا $x \geq ۴$ (چرا؟). y مقداری غیرمنفی است، ولی هر مقدار مثبتی را می‌تواند اختیار کند، زیرا

$$y^{۲} = x^{۲} - ۴x \Rightarrow x^{۲} - ۴x - y^{۲} = ۰$$

و این معادلهٔ درجه دوم (نسبت به x) به‌ازای هر مقدار مثبت y دارای دو ریشه است، زیرا مبین آن $۱۶ + ۴y^{۲}$ همواره مثبت است: $y \geq ۰$.

۴) $-۳ \leq x \leq ۳$ (چرا؟) y نامنفی است و از $\sqrt{۹}$ یعنی ۳ نمی‌تواند بیشتر شود (چرا؟): $۰ \leq y \leq ۳$.

۵) **پاسخ.** $x \geq ۰$ و $y \geq ۰$.

۶) **پاسخ.** $x \geq -۵$، $y \geq -۱$.

۷) **پاسخ.** $x \neq \frac{۱}{۲}$، $y \neq \frac{۱}{۲}$ (برای برد تابع، x را نسبت به y محاسبه کنید).

۸) **پاسخ.** $x \neq b\ (a \neq ۰)$، $y \neq ۰\ (a \neq ۰)$.

۹) **راهنمایی.** عبارت y را به‌این صورت تبدیل کنید:

$$y = (\sin^{۲} x + \cos^{۲} x)^{۳} - ۳\sin^{۲} x \cos^{۲} x(\sin^{۲} x + \cos^{۲} x)$$
$$= ۱ - \frac{۳}{۴}\sin^{۲} ۲x$$

پاسخ. $x \in \mathbf{R}$، $\frac{۱}{۴} \leq y \leq ۱$.

۱۰) روشن است که $x \in \mathbf{R}$. برای تعیین برد تابع، آن را به این صورت تبدیل می‌کنیم:

$$y = \sin x + \sqrt{۳} \cos x + ۱ = \sin x + \tan ۶۰^\circ \cos x + ۱ =$$
$$= \frac{\sin x \cos ۶۰^\circ + \cos x \sin ۶۰^\circ + \cos ۶۰^\circ}{\cos ۶۰^\circ} =$$
$$= ۲ \sin(x + ۶۰^\circ) + ۱$$

حداکثر مقدار سینوس برابر ۱ و حداقل آن برابر ۱ − است. پس

$$-۱ \leq y \leq ۳$$

یادداشت. می‌توانستیم با استفاده از رابطه‌های

$$\sin x = \frac{۲ \tan \frac{x}{۲}}{۱ + \tan^۲ \frac{x}{۲}}, \quad \cos x = \frac{۱ - \tan^۲ \frac{x}{۲}}{۱ + \tan^۲ \frac{x}{۲}}$$

عبارت y را به یک عبارت درجه دوم تبدیل کنیم. اگر $t = \tan \frac{x}{۲}$ بگیریم، به‌دست می‌آید:

$$y = \frac{۲t}{۱ + t^۲} + \sqrt{۳} . \frac{۱ - t^۲}{۱ + t^۲} + ۱ = \frac{(۱ - \sqrt{۳})t^۲ + ۲t + (۱ + \sqrt{۳})}{۱ + t^۳}$$

اکنون برابری را نسبت به t منظم می‌کنیم، به این رابطه می‌رسیم:

$$(y - ۱ + \sqrt{۳})t^۲ - ۲t + (y - ۱ - \sqrt{۳}) = ۰$$

برای این‌که این معادلهٔ درجه دوم ریشه‌های حقیقی داشته باشد، باید مبین آن نامنفی باشد:

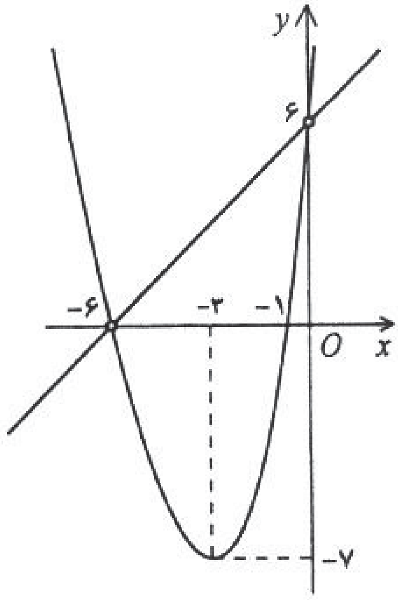
$$\Delta = 1-(y-1+\sqrt{3})(y-1-\sqrt{3}) \geq 0 \Rightarrow y^2-2y-3 \leq 0$$

برای این‌که عبارت درجه دوم y^2-2y-3 منفی باشد، باید y بین دو ریشهٔ آن قرار گیرد. درنتیجه

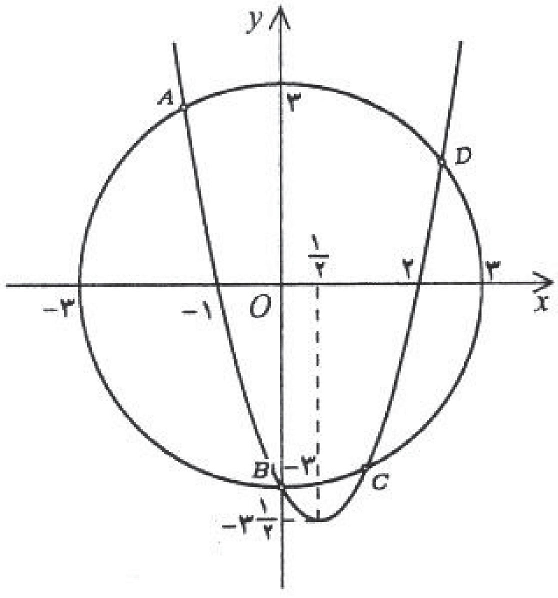
$$-1 \leq y \leq 3$$

۴۰. ۱) نمودار سهمی $y = x^2+7x+6$ و خط راست $y = x+6$ را روی یک دستگاه محورهای مختصات رسم می‌کنیم (شکل ۵۹). این دو نمودار در نقطه‌های $A(-6,0)$ و $B(0,6)$ یکدیگر را قطع می‌کنند.

پاسخ. $x=-6$، $y=0$ و $x=0$، $y=6$.



شکل ۵۹



شکل ۶۰

۲) نمودار $x^2+y^2=9$ دایره‌ای است به مرکز مبداء مختصات و به شعاع برابر ۳؛ نمودار $y = 2x^2-2x-3$ یک سهمی است به راس نقطهٔ $\left(\frac{1}{2}, -3\frac{1}{2}\right)$. این دو نمودار یکدیگر را در چهار نقطهٔ A، B، C و D

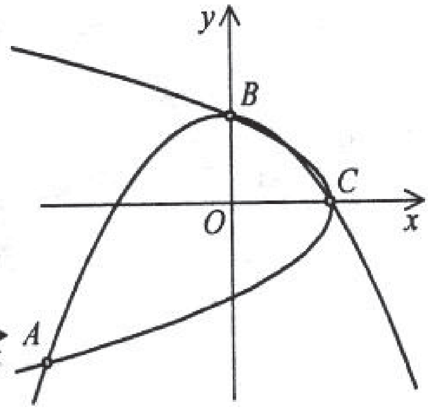
قطع می‌کنند که باتوجه به مختصات آن‌ها، جواب‌های تقریبی دستگاه به‌دست می‌آید.

پاسخ. (−۱/۲, ۲/۷)، (۰, −۳)، (۱/۱, −۲/۸)، (۲/۲, ۲/۳).

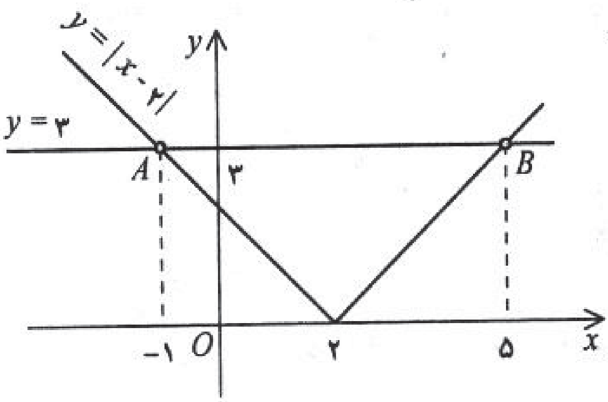
(شکل ۶۰ را خودتان روی کاغذ شطرنجی و با انتخاب واحد بزرگ رسم و جواب‌ها را آزمایش کنید.)

۳) راهنمایی. $y = -x^۲ + ۱$ یک سهمی است که محور $y'y$ محور تقارن آن است. $x = -y^۲ + ۱$ یک سهمی است که محور تقارن آن $x'x$ است (شکل ۶۱).

پاسخ. (۲/۲− و ۱/۸−)، (۱, ۰)، (۰, ۱).



شکل ۶۱

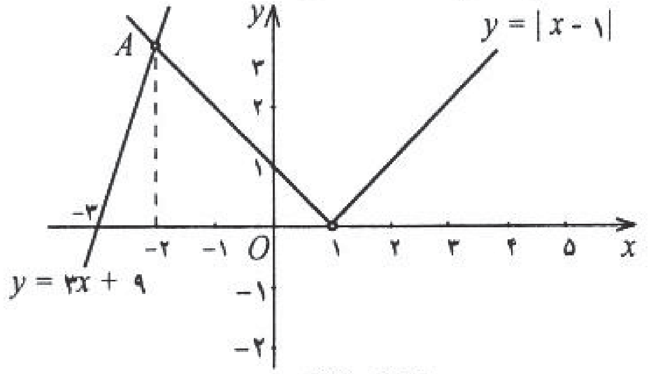


شکل ۶۲

۴۱. ۱) نمودار تابع‌های $y = |x - ۲|$ و $y = ۳$ را رسم می‌کنیم (شکل ۶۲) و مقدارهایی از x را انتخاب می‌کنیم که برای آن‌ها، نمودار $y = |x - ۲|$ زیر نمودار $y = ۳$ قرار گرفته باشد، یعنی $-۱ < x < ۵$، یعنی مقدارهایی که بین طول‌های نقطه‌های برخورد A و B قرار دارند.

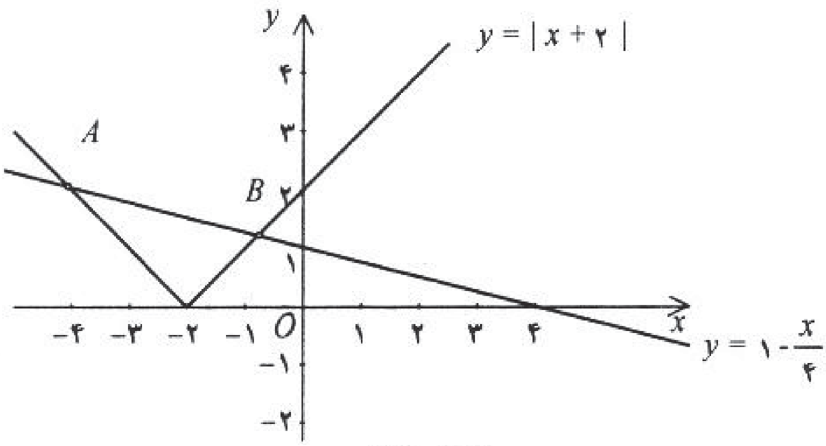
۲) نمودار تابع‌های $y_۱ = ۳x + ۹$ و $y_۲ = |x - ۱|$ را در یک دستگاه محورهای مختصات رسم می‌کنیم. این دو نمودار در نقطهٔ A به طول $x = -۲$ یکدیگر را قطع می‌کنند (شکل ۶۳). بنابر شرط مساله، باید

مقدارهایی از x را انتخاب کنیم که، برای آن‌ها، نمودار تابع y_1 بالای نمودار تابع y_2 واقع باشد. روشن است این‌ها متناظر با نقطه‌هایی هستند که در سمت راست نقطهٔ A قرار گرفته‌اند، یعنی $x > -2$.



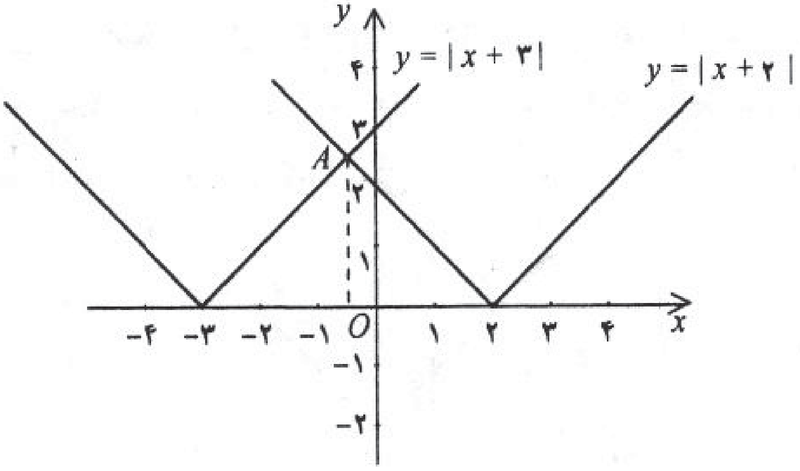
شکل ۶۳

۳) در شکل ۶۴، نمودار تابع‌های مربوط رسم شده است. نامعادله برای مقدارهایی از x برقرار است که برای آن‌ها، نمودار $y_1 = |x+2|$ زیر نمودار تابع $y_2 = 1 - \frac{x}{4}$ واقع باشد، یعنی $-4 < x < -0/8$.



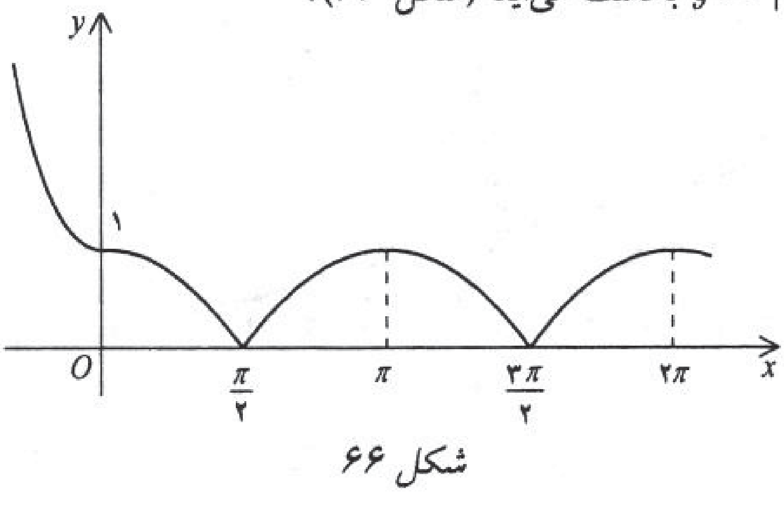
شکل ۶۴

۴) نابرابری را به‌صورت $|x+3| < |x-2|$ می‌نویسیم. باتوجه به شکل ۶۵ روشن است، مقدارهایی از x در معادله صدق می‌کنند که برای آن‌ها داشته باشیم: $x < -\frac{1}{2}$.



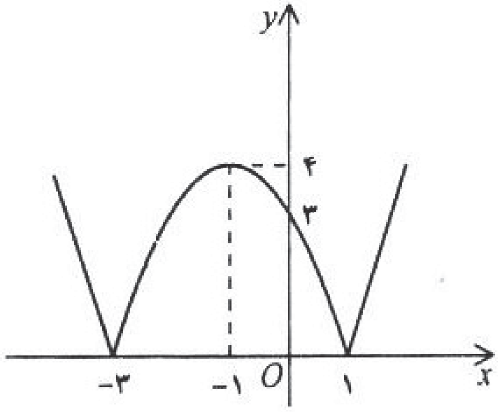
شکل ۶۵

۴۲. ۱) $y = ۱ + x^۲$ معادلهٔ یک‌سهمی به راس $(۱ , ۰)$ است که، از آن، بخشی مورد نظر است که در سمت چپ oy قرار دارد. سپس، اگر $y = \cos x$ را برای $x \geq ۰$ رسم کنیم و بخش‌هایی از نمودار را که زیر محور ox واقع است به قرینهٔ خود نسبت به این محور تبدیل می‌کنیم، نمودار $y = |\cos x|$ به‌دست می‌آید (شکل ۶۶).



شکل ۶۶

۲) **راهنمایی.** سهمی $y = x^۲ + ۲x - ۳$ را رسم و، سپس، بخشی از نمودار را که زیر محور $x'x$ است به قرینهٔ خود نسبت به محور $x'x$ تبدیل کنید (شکل ۶۷).



شکل ۶۷

۴۳. ۱) برای $\sqrt[۲]{۱ + x^۴}$ داریم $x \in \mathbf{R}$ و برای حقیقی بودن رادیکال دوم، باید داشته باشیم: $|x + ۲| \geq ۷$. دو حالت در نظر می‌گیریم: الف) $x + ۲ > ۰$، در این صورت نامعادله چنین می‌شود:

$$x + ۲ \geq ۷ \Rightarrow x \geq ۵$$

ب) $x + ۲ < ۰$، در این صورت

$$-x - ۲ \geq ۷ \Rightarrow x + ۲ \leq -۷ \Rightarrow x \leq -۹$$

۲) $x \leq ۰$ نمی‌تواند باشد (اگر $x < ۰$، آن‌وقت $\frac{x}{|x|} = -۱$ و زیر رادیکال منفی می‌شود). در حالت $x = ۰$ هم رادیکال از بین می‌رود (زیرا مقدار آن برابر صفر می‌شود). $\log(x^۲ - ۱)$ وقتی معنی دارد که $x^۲ - ۱$ مثبت باشد که اگر شرط قبلی $x > ۰$ را رعایت کنیم، به جواب $x > ۱$ می‌رسیم.

۳) $x - |x|$ برای $x \geq ۰$ برابر صفر و به‌ازای $x < ۰$ برابر $۲x-$ می‌شود که مثبت است، یعنی $\sqrt{|x| - x}$ همیشه حقیقی است. کسر $\frac{x^۲ + ۱}{x^۲ - ۱}$ هم به‌ازای هر x به‌جز $x = \pm ۱$ معنا دارد.

پاسخ. $x \neq \pm ۱$

۴۴. ۱) $x \neq -1$ و $x \neq 2$ برای تعیین برد تابع، برابری را نسبت به x منظم می‌کنیم:

$$y = \frac{x}{(x+1)(x-2)} \Rightarrow yx^2 - (y+1)x - 2y = 0$$

این معادلهٔ درجه دوم وقتی ریشه‌های حقیقی دارد که مبین آن منفی نباشد:

$$\Delta = (y+1)^2 + 8y^2 = 9y^2 + 2y + 1 = \left(3y + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{8}{9} > 0$$

یعنی y می‌تواند هر عدد حقیقی باشد: $y \in \mathbf{R}$.

۲) $x \in \mathbf{R}$. برای تعیین برد تابع می‌نویسیم:

$$y = a\sin x + b\cos x =$$
$$= \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x\right)$$

$\dfrac{|a|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ از ۱ بزرگتر نیست (چرا؟) و می‌توان آن را برابر $\cos\alpha$ گرفت.

در این صورت $\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ برابر $\sin\alpha$ می‌شود (چرا؟) و داریم:

$$y = \sqrt{a^2+b^2}(\sin x\cos\alpha + \cos x\sin\alpha) = \sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\alpha)$$

چون $-1 \leq \sin(x+\alpha) \leq 1$، بنابراین

$$-\sqrt{a^2+b^2} \leq y \leq \sqrt{a^2+b^2}$$

۳) پاسخ. $x \in \mathbf{R}$ و $-1 \leq y \leq \frac{5}{3}$.

۴) برای تعیین دامنه، باید داشته باشیم:

$$|x| - 1 \neq 0 \Rightarrow |x| \neq 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x \neq \pm 1 (x \in \mathbf{R} - \{1, -1\})$$

برای بُرد، در حالت $x < 0$ و $x \neq -1$ داریم

$$y = \frac{x+1}{-x-1} = -\frac{x+1}{x+1} = -1$$

برای $x \geq 0$ و $x \neq 1$ داریم $y = \frac{x+1}{x-1}$. x را برحسب y محاسبه می‌کنیم، به‌دست می‌آید: $x = \frac{y+1}{y-1}$ $(y \neq 1)$. ولی طبق شرط این حالت مقدار x باید مثبت باشد:

$$x = \frac{y+1}{y-1} > 0 \Rightarrow y \leq -1 \text{ و یا } y > 1 \text{ (برد تابع)}$$

۵) پاسخ. $x \in \mathbf{R}$ و $y \geq 0$.

۶) $x \in \mathbf{R}$. مقدار y برای هر عدد حقیقی x، مثبت است. بنابراین برابری مفروض هم‌ارز است با

$$y^2 = \frac{(x-2)^2+2}{x^2+4}, \; y > 0$$

برابری را نسبت به x منظم می‌کنیم:

$$(y^2-1)x^2 + 4x + (4y^2-8) = 0$$

برای این‌که این معادلهٔ درجه دوم ریشه‌های حقیقی داشته باشد، باید مبین آن منفی نباشد:

$$\Delta = 4 - (y^2-1)(4y^2-8) = -4y^4 + 12y^2 - 4 \geq 0$$

که از آن به‌دست می‌آید: $\frac{3-\sqrt{5}}{2} \leq y^2 \leq \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

پاسخ. $x \in \mathbf{R}$، $\frac{\sqrt{5}-1}{2} \le y \le \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ (بیشترین مقدار y به‌ازای $x = 1 + \sqrt{5}$ و کمترین مقدار آن به‌ازای $x = 1 - \sqrt{5}$ به‌دست می‌آید.)

۴۵. توجه کنیم، وقتی $f(f(x))$ یا fof معلوم باشد، در حالت کلی ممکن است چند جواب برای $f(x)$ به‌دست آید. مثلاً اگر $f(f(x)) = x$، آن‌وقت ممکن است $f(x) = x$ یا $f(x) = \frac{1}{x}$ باشد. درضمن راه حل کلی هم، برای مساله وجود ندارد. ولی اگر $f(x)$ یک چندجمله‌ای از درجهٔ n باشد، fof یک چندجمله‌ای از درجهٔ n^2 خواهد بود.

۱) $f(x)$ باید درجه اول و به‌صورت $f(x) = ax + b$ باشد. در این صورت

$$f(f(x)) = a(ax+b) + b = a^2x + ab + b$$

و باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} a^2 = 4 \\ ab + b = -21 \end{cases} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} a = 2 \\ b = -7 \end{array} \right. \quad \text{یا} \quad \left| \begin{array}{l} a = -2 \\ b = 21 \end{array} \right.$$

مساله دو جواب دارد: $f(x) = 2x - 7$ یا $f(x) = -2x + 21$.

۲) $f(x)$ از درجه دوم و به‌صورت $ax^2 + bx + c$ است. در این صورت

$$\begin{aligned} f(f(x)) &= a(ax^2+bx+c)^2 + b(ax^2+bx+c) + c = \\ &= a(a^2x^4 + 2abx^3 + b^2x^2 + 2acx^2 + \\ &+ 2bcx + c^2) + abx^2 + b^2x + bc + c = \\ &= a^3x^4 + 2a^2bx^3 + (ab^2 + 2a^2c + ab)x^2 + \\ &+ (2abc + b^2)x + (ac^2 + bc + c) \end{aligned}$$

از این‌جا باتوجه به فرض، به این پنج معادله (برای سه مجهول a، b و c) می‌رسیم:

$$a^{۳} = ۱, \quad ۲a^{۲}b = -۴, \quad ab^{۲} + ۲a^{۲}c + ab = ۸,$$
$$۲abc + b^{۲} = -۸, \quad ac^{۲} + bc + c = ۶$$

از سه معادلهٔ اول به‌دست می‌آید: $a = ۱$، $b = -۲$ و $c = ۳$. درضمن همین مقدارها در معادله‌های چهارم و پنجم هم صدق می‌کنند. از این‌جا روشن می‌شود که هر عبارت درجه چهارم دلخواه را نمی‌توان به‌عنوان $f(f(x))$ انتخاب کرد.

پاسخ. $f(x) = x^{۲} - ۲x + ۳$.

۴۶. ۱) ثابت می‌کنیم $۲a$ دورهٔ تناوب این تابع است، یعنی ثابت می‌کنیم $f(x + ۲a) = f(x)$.

باتوجه به فرض روشن است که $f(x+a) > \frac{۱}{۲}$. اگر $\frac{۱}{۲}$ را به‌سمت چپ برابری ببریم و دو طرف را به توان ۲ برسانیم، بعد از عمل‌های ساده به‌دست می‌آید:

$$[f(x+a)]^{۲} - f(x+a) = f(x) - [f(x)]^{۱} - \frac{۱}{۴} \qquad (۱)$$

از طرف دیگر داریم:

$$f(x + ۲a) = \frac{۱}{۲} + \sqrt{f(x+a) - [f(x+a)]^{۲}}$$

که باتوجه به رابطهٔ (۱) نتیجه می‌شود:

$$f(x + ۲a) = \frac{۱}{۲} + \sqrt{[f(x)]^{۲} - f(x) + \frac{۱}{۴}} =$$
$$= \frac{۱}{۲} + \left|f(x) - \frac{۱}{۲}\right| = f(x)$$

(از شرط $f(x) > \frac{1}{2}$ استفاده کردیم). به این ترتیب $f(x + 2a)$ با $f(x)$ برابر شد: تابع متناوب است و دورهٔ تناوبی برابر $2a$ دارد.

۴۷. باید ثابت کنیم $f(-x) = -f(x)$. داریم:

$$f(-x) = \log_a(-x + \sqrt{x^2 + 1}) =$$
$$= \log_a \frac{(\sqrt{x^2 + 1})^2 - x^2}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \log_a \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} =$$
$$\log_a 1 - \log_a(x + \sqrt{x^2 + 1}) = -\log_a(x + \sqrt{x^2 + 1}) = -f(x)$$

مبداء مختصات مرکز تقارن نمودار این تابع است.

۴۸. برای نقطه‌های برخورد نمودارها، باید معادله‌های آن‌ها را در یک دستگاه قرار داد:

$$\begin{cases} y = \dfrac{mx + 2}{x - 1} \\ y = \dfrac{x + m - 1}{x + 1} \end{cases} \Rightarrow \frac{mx + 2}{x - 1} = \frac{x + m - 1}{x + 1}$$

که بعد از عمل‌های ساده، به این معادلهٔ درجه دوم می‌رسد:

$$(m - 1)x^2 + 4x + m + 1 = 0 \qquad (1)$$

ریشه‌های این معادله، طول‌های نقطه‌های برخورد نمودارها هستند. ولی این معادله همیشه ریشه‌های حقیقی ندارد و شرط وجود ریشه‌های حقیقی، منفی نبودن مبین آن است:

$$\Delta = 4 - (m^2 - 1) = 5 - m^2 \geq 0 \Rightarrow -\sqrt{5} \leq m \leq \sqrt{5}$$

به‌این ترتیب: با شرط $-\sqrt{5} < m < \sqrt{5}$، نمودارها در دو نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند؛ در حالت‌های $m = -\sqrt{5}$ و $m = \sqrt{5}$ دو نمودار بر هم

مماس‌اند و، سرانجام، در حالت‌های $m < -\sqrt{5}$ و $m > \sqrt{5}$ دو نمودار یکدیگر را قطع نمی‌کنند.

اگر ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم (۱) را x' و x'' بنامیم، وقتی x' و x'' عددهایی حقیقی باشند، معرف طول‌های نقطه‌های برخورد دو نمودارند. M را وسط این دو نقطه می‌گیریم، داریم:

$$\text{طول نقطه } M: \quad x = \frac{x' + x''}{2} = -\frac{2}{m-1}$$

برای پیدا کردن عرض نقطهٔ M، یکی از معادله‌های دو نمودار را انتخاب می‌کنیم، با قرار دادن x' و x'' در آن، عرض‌های نقطه‌های برخورد دو نمودار به‌دست می‌آید، آن‌وقت عرض نقطهٔ وسط آن را پیدا می‌کنیم:

$$y = \frac{y' + y''}{2} = \frac{\frac{mx' + 2}{x - 1} + \frac{mx'' + 2}{x'' - 1}}{2} =$$

$$= \frac{2mx'x'' - (m-2)(x' + x'') - 4}{2[x'x'' - (x' + x'') + 1]} = \frac{m^2 + m - 2}{2(m+2)}$$

$m = -2$ نمی‌تواند باشد، زیرا به‌ازای $m = -2$، یکی از نمودارها به‌صورت خط راست $y = -1$ درمی‌آید که با نمودار دوم، تنها یک نقطهٔ برخورد دارد. بنابراین با شرط $m \neq -2$

$$\text{عرض نقطهٔ } M: \quad y = \frac{m^2 + m - 2}{2(m+2)} = \frac{(m+2)(m-1)}{2(m+2)} = \frac{m-1}{2}$$

به‌این ترتیب: $M(x = -\frac{2}{m-1}$ و $y = \frac{m-1}{2})$. برای پیدا کردن معادلهٔ مکان M، باید پارامتر m را بین x و y آن حذف کرد که، درنتیجه، به معادله $xy = -1$ می‌رسیم.

آیا تمامی نمودار تابع با ضابطهٔ $xy = -۱$، جزو مکان هندسی نقطهٔ M است؟ پیش از این دیدیم که

$$-\sqrt{۵} \leq m \leq \sqrt{۵} \text{ و } m \neq -۲$$

درضمن $x = -\frac{۲}{m-۱}$ (طول نقطهٔ M). از این برابری m را برحسب x پیدا می‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$m = \frac{x-۲}{x}$$

بنابراین، باید داشته باشیم:

$$-\sqrt{۵} \leq \frac{x-۲}{x} \leq \sqrt{۵} \text{ و } \frac{x-۲}{x} \neq -۲$$

نابرابری‌های اول را می‌توان این‌طور نوشت:

$$\left(\frac{x-۲}{x}\right)^۲ \leq ۵ \Rightarrow x^۲ + x - ۱ \geq ۰$$

که از آن‌جا به‌دست می‌آید $x \leq -\frac{\sqrt{۵}+۱}{۲}$ یا $x \geq \frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}$. از $\frac{x-۲}{x} \neq -۲$ هم به‌دست می‌آید $x \neq \frac{۲}{۳}$. از معادله‌های نمودارهای اصلی هم به شرط‌های $x \neq \pm ۱$ می‌رسیم. بنابراین معادلهٔ مکان این‌طور بیان می‌شود:

$$\begin{cases} xy = -۱ \\ x \leq -\frac{\sqrt{۵}+۱}{۲} \text{ یا } x \geq \frac{\sqrt{۵}-۱}{۲},\ x \neq \frac{۲}{۳},\ x \neq ۱ \end{cases}$$

($x \neq -۱$ در شرط $x \leq -\frac{\sqrt{۵}+۱}{۲}$ به‌خودی خود وجود دارد).

۴۹. پاسخ‌ها: ۱) $\frac{۳}{۲}$؛ ۲) ۱؛ ۳) ۰؛ ۴) $+\infty$؛ ۵) ۰، ۶) $\pm\infty$؛

$$\underset{x\to ۳}{\text{حد}}\, y = \underset{x\to ۳}{\text{حد}} \frac{(x+۳)(x-۳)}{x(x-۳)} = \underset{x\to ۳}{\text{حد}} \frac{x+۳}{x} = ۲;$$

$$۸)\ \underset{x\to -۱}{\text{حد}} \frac{x^۲ - x - ۲}{x^۳ + ۱} = \underset{x\to -۱}{\text{حد}} \frac{(x+۱)(x-۲)}{(x+۱)(x^۲ - x + ۱)} =$$

$$= \underset{x\to -۱}{\text{حد}} \frac{x-۲}{x^۲ - x + ۱} = -۱;$$

$$۹)\ \underset{x\to ۳}{\text{حد}} \frac{۹ - x^۲}{\sqrt{۳x} - ۳} = \underset{x\to ۳}{\text{حد}} \frac{-(x-۳)(x+۳)(\sqrt{۳x}+۳)}{۳(x-۳)} =$$

$$= \underset{x\to ۳}{\text{حد}} \frac{-(x+۳)(\sqrt{۳x}+۳)}{۳} = -۴;$$

$$۱۰)\ \underset{x\to ۱}{\text{حد}}\, y = \underset{x\to ۱}{\text{حد}} \frac{x(x^۲-۱) - (x^۲-۱)}{x(x^۲-۱) + (x^۲-۱)} = \underset{x\to ۱}{\text{حد}} \frac{x-۱}{x+۱} = ۰;$$

$$۱۱)\ \underset{x\to ۰}{\text{حد}}\, y = \underset{x\to ۰}{\text{حد}} \frac{(x+۴) - ۴}{x(\sqrt{x+۴}+۲)} = \underset{x\to ۰}{\text{حد}} \frac{۱}{\sqrt{x+۴}+۲} = \frac{۱}{۴};$$

$$۱۲)\ \underset{x\to -۱}{\text{حد}}\, y = \underset{x\to -۱}{\text{حد}} \frac{(۴+x+x^۲) - ۴}{(x+۱)(\sqrt{۴+x+x^۲}+۲)} =$$

$$\underset{x\to -۱}{\text{حد}} \frac{x(x+۱)}{(x+۱)(\sqrt{۴+x+x^۲}+۲)} =$$

$$= \underset{x\to -۱}{\text{حد}} \frac{x}{\sqrt{۴+x+x^۲}+۲} = -\frac{۱}{۴};$$

$$۱۳)\ \underset{x\to ۰}{\text{حد}}\, y = \underset{x\to ۰}{\text{حد}} \frac{(۱+x) - (۱-x)}{x(\sqrt{۱+x} + \sqrt{۱-x})} =$$

$$= \lim_{x\to ۰} \frac{۲}{\sqrt{۱+x}+\sqrt{۱-x}} = ۱;$$

$$۱۴)\ \lim_{x\to ۲} y = \lim_{x\to ۲} \frac{(۱+x+x^۲)-(۷+۲x-x^۲)}{x(x-۲)(\sqrt{۱+x+x^۲}+\sqrt{۷+۲x-x^۲})} =$$

$$= \lim_{x\to ۲} \frac{۲x^۲-x-۶}{x(x-۲)(\sqrt{۱+x+x^۲}+\sqrt{۷+۲x-x^۲})} =$$

$$= \lim_{x\to ۲} \frac{(x-۲)(۲x+۳)}{x(x-۲)(\sqrt{۱+x+x^۲}+\sqrt{۷+۲x-x^۲})} =$$

$$= \lim_{x\to ۲} \frac{۲x+۳}{x(\sqrt{۱+x+x^۲}+\sqrt{۷+۲x-x^۲})} = \frac{۱}{۴}\sqrt{۷};$$

۱۵) گویا کردن صورت کسر، به شکلی که مفروض است کم و بیش طولانی است، حتا وقتی تعداد جمله‌های گنگ بیشتر باشد، عمل گویا کردن، ناممکن می‌شود. به‌همین مناسبت بهتر است کسر را به مجموع چند کسر مبهم (به‌صورت $\frac{۰}{۰}$) تبدیل و سپس، حد مجموع را پیدا کنیم:

$$\lim_{x\to ۱} y = \lim_{x\to ۱} \left[\frac{(\sqrt{x^۲+x+۲}-۲}{x^۲-۳x+۲} - \frac{۳(\sqrt{۲x^۲+x+۱}-۲)}{x^۲-۳x+۲}\right]$$

$$= \lim_{x\to ۱} \frac{(x-۱)(x+۲)}{(x-۱)(x-۲)(\sqrt{x^۲+x+۱}+۲)} -$$

$$- \lim_{x\to ۱} \frac{۳(x-۱)(۲x+۳)}{(x-۱)(x-۲)(\sqrt{۲x^۲+x+۱+۲})}$$

$$= \lim_{x\to ۱} \frac{x+۲}{(x-۲)(\sqrt{x^۲+x+۱}+۲)} -$$

$$- \lim_{x\to ۱} \frac{۳(۲x+۳)}{(x-۲)(\sqrt{۲x^۲+x+۱}+۲)} = ۳$$

$$۱۶)\ \frac{(۱+x)^m-۱}{x}=\frac{(۱+mx+\frac{m(m-۱)}{۲}x^۲+\ldots+x^m)-۱}{x}$$

$$=\frac{x(m+\frac{m(m-۱)}{۲}x+\ldots+x^{m-۱})}{x}=$$

$$=m+\frac{m(m-۱)}{۲}x+\ldots+x^{m-۱}(x\neq ۰)$$

و بنابراین $\underset{x\to ۰}{\text{حد}}\, y=m$.

۵۰. وقتی با حالت مبهم $\infty-\infty$ در عبارت‌های گنگ سروکار داریم، به‌ویژه اگر با رادیکال‌هایی روبه‌رو هستیم که فرجهٔ زوج دارند، توجه به دو نکته می‌تواند جلو اشتباه‌های احتمالی را بگیرد:

۱) حالت $x\to+\infty$ را از حالت $x\to-\infty$ جدا کنید و در هر حالت مساله را به‌طور جداگانه حل کنید.

۲) به‌یاد داشته باشید که $\sqrt{x^۲}=|x|$ یا $\sqrt[۴]{x^۴}=|x|$؛ در ضمن برای $x>۰$ داریم $|x|=x$ و برای $x<۰$ داریم $|x|=-x$.

$$۱)\ \underset{x\to+\infty}{\text{حد}}\, y=\underset{x\to+\infty}{\text{حد}}\frac{(x^۲+۸x+۳)-(x^۲+۴x+۳)}{\sqrt{x^۲+۸x+۳}+\sqrt{x^۲+۴x+۳}}=$$

$$=\underset{x\to+\infty}{\text{حد}}\frac{۴x}{|x|\left(\sqrt{۱+\frac{۸}{x}+\frac{۳}{x^۲}}+\sqrt{۱+\frac{۴}{x}+\frac{۳}{x^۲}}\right)}=$$

$$=\underset{x\to+\infty}{\text{حد}}\frac{۴}{\sqrt{۱+\frac{۸}{x}+\frac{۳}{x^۲}}+\sqrt{۱+\frac{۴}{x}+\frac{۳}{x^۲}}}=۲$$

(چون x مقداری مثبت بود $(x\to+\infty)$، توانستیم x را با $|x|$ در صورت

و مخرج حذف کنیم).

وقتی $x \to -\infty$، آغاز عمل‌ها با حالت قبل تفاوتی ندارد، ولی چون x مقداری منفی است، $|x|$ برابر $-x$ می‌شود و به‌دست می‌آید:

$$\lim_{x \to -\infty} y = -۲$$

$$۲)\ y = \frac{۱}{x-۱} - \frac{۱}{x^۲-۱} = \frac{x}{x^۲-۱}$$

بنابراین $\lim_{x \to ۱} \frac{x}{x^۲-۱} = \pm\infty$ (وقتی $x \to ۱$، صورت کسر مثبت است، ولی مخرج کسر برای $x < ۱$ منفی و برای $x > ۱$ مثبت است.) در واقع

$$\lim_{x \to ۱^-} \frac{x}{x^۲-۱} = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \to ۱^+} \frac{x}{x^۲-۱} = +\infty$$

۳) وقتی $x \to -\infty$، ابهامی وجود ندارد، زیرا رادیکال و $(-x)$ هردو به‌سمت $+\infty$ میل می‌کنند:

$$\lim_{x \to -\infty} (\sqrt{x^۲ + ۳x} - x) = +\infty;$$

ولی وقتی $x \to +\infty$، به‌صورت مبهم $\infty - \infty$ درمی‌آید:

$$\lim_{x \to +\infty} y = \lim_{x \to +\infty} \frac{(x^۲ + ۳x) - x^۲}{\sqrt{x^۲ + ۳x} + x} =$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{۳}{\sqrt{۱ + \frac{۳}{x}} + ۱} = \frac{۳}{۲}$$

$$۴)\ \lim_{x \to \pm\infty} y = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{(x^۲ + x + ۱) - (x^۲ - x)}{\sqrt{x^۲ + x + ۱} + \sqrt{x^۲ - x}} =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x\left(2+\frac{1}{x}\right)}{|x|\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)}$$

بنابراین $\lim_{x\to\infty} y = 1$ و $\lim_{x\to-\infty} y = -1$

۵) $\lim_{x\to-\infty}(x-\sqrt{x^2-a^2}) = -\infty;$

$$\lim_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x^2-a^2}) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{a^2}{|x|\left(1+\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}\right)} = 0 \quad (a \neq 0)$$

در حالت $a = 0$، عبارت به‌صورت $y = x - |x|$ درمی‌آید که باز هم، وقتی $x \to +\infty$، برابر صفر می‌شود.

۶) **پاسخ.** $\frac{1}{4}$.

۷) $$\lim_{x\to 2} y = \lim_{x\to 2} \frac{x^2+2x-8}{x^3-8} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+4)}{(x-2)(x^2+2x+4)} =$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{x+4}{x^2+2x+4} = \frac{1}{2};$$

۸) **پاسخ.** $\lim_{x\to\pm\infty} y = 0$.

۹) $\lim_{x\to\pm\infty} y =$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{(2x^3+x^2)-(2x^3-3x+1)}{\sqrt[3]{(2x^3+x^2)^2}+\sqrt[3]{(2x^3+x^2)(2x^3-3x+1)}+\sqrt[3]{(2x^3-3x+1)^2}}$$

$$= \underset{x\to\pm\infty}{\text{حد}} \frac{x^{۲}(۱+\frac{۳}{x}+\frac{۱}{x^{۳}})}{x^{۲}(\sqrt[۳]{(۲+\frac{۳}{x})^{۲}}} \to$$

$$\to \frac{}{+\sqrt[۳]{\left(۲+\frac{۳}{x}\right)\left(۲-\frac{۳}{x^{۲}}+\frac{۱}{x^{۳}}\right)}+\sqrt[۳]{\left(۲-\frac{۳}{x^{۲}}+\frac{۱}{x^{۳}}\right)}} = \frac{۱}{۶}\sqrt[۳]{۲}$$

$$۱۰)\quad \underset{x\to\pm\infty}{\text{حد}}\, y = \underset{x\to\pm\infty}{\text{حد}} \frac{\sqrt{x^{۴}+x^{۳}+۱}-\sqrt{x^{۴}-x^{۳}-۱}}{\sqrt[۴]{x^{۴}+x^{۳}+۱}+\sqrt[۴]{x^{۴}-x^{۳}-۱}} =$$

$$= \underset{x\to\pm\infty}{\text{حد}} \frac{۲x^{۳}+۲}{(\sqrt[۴]{x^{۲}+x^{۳}+۱}+\sqrt[۴]{x^{۴}-x^{۳}-۱})} \times$$

$$\times \frac{۱}{(\sqrt{x^{۴}+x^{۳}+۱}+\sqrt{x^{۴}-x^{۳}-۱})} =$$

$$= \underset{x\to\pm\infty}{\text{حد}} \frac{x^{۳}\left(۲+\frac{۲}{x^{۳}}\right)}{x^{۲}|x|\left(\sqrt[۴]{۱+\frac{۱}{x}+\frac{۱}{x^{۴}}}+\sqrt[۴]{۱-\frac{۱}{x}+\frac{۱}{x^{۴}}}\right)} \times$$

$$\times \frac{۱}{\left(\sqrt{۱+\frac{۱}{x}+\frac{۱}{x^{۴}}}+\sqrt{۱-\frac{۱}{x}-\frac{۱}{x^{۴}}}\right)}$$

و بنابراین $\underset{x\to+\infty}{\text{حد}}\, y = \frac{۱}{۲}$ و $\underset{x\to-\infty}{\text{حد}}\, y = -\frac{۱}{۲}$ ؛

۱۱) **پاسخ.** $\underset{x\to-\infty}{\text{حد}}\, y = -\infty$ و $\underset{x\to+\infty}{\text{حد}}\, y = -\frac{۱}{۴}$

۱۲) **راهنمایی.** برای گویا کردن صورت کسر، از این اتحاد استفاده کنید:

$$(a-b)(a^{۴}+a^{۳}b+a^{۲}b^{۲}+ab^{۳}+b^{۴}) = a^{۵}-b^{۵}$$

پاسخ. $\underset{x\to\pm\infty}{\text{حد}}\, y = \frac{۴}{۵}$.

۵۱. کسر را y می‌نامیم و به این صورت می‌نویسیم:

$$y = \frac{x-۱}{\sqrt{x}-۱}\cdot\frac{x-۱}{\sqrt[۳]{x}-۱}\cdot\frac{x-۱}{\sqrt[۴]{x}-۱}\cdot\ldots\cdot\frac{x-۱}{\sqrt[n]{x}-۱}$$

در مخرج $n-۱$ عامل (چرا؟)، در صورت کسر، $n-۱$ عامل $x-۱$ وجود دارد.

چون حد حاصل‌ضرب، برابر است با حاصل‌ضرب حدها، حد هر کسر را به‌طور جداگانه پیدا می‌کنیم. در همهٔ کسرها، از این اتحاد استفاده می‌کنیم:

$$(a-b)(a^{n-۱}+a^{n-۲}b+a^{n-۳}b^{۲}+\ldots+ab^{n-۲}+b^{n-۱}) = a^{n}-b^{n}$$

توجه کنید، در سمت چپ اتحاد، در درون پرانتز دوم، n جمله وجود دارد.

$$\underset{x\to۱}{\text{حد}}\frac{x-۱}{\sqrt{x}-۱} = \underset{x\to۱}{\text{حد}}\frac{(x-۱)(\sqrt{x}+۱)}{x-۱} = \underset{x\to۱}{\text{حد}}(\sqrt{x}+۱) = ۲,$$

$$\text{حد}\,\frac{x-۱}{\sqrt[۳]{x}-۱} = \underset{x\to۱}{\text{حد}}\frac{(x-۱)(\sqrt[۳]{x^{۲}}+\sqrt[۳]{x}+۱)}{x-۱} = ۳,$$

$$\underset{x\to۱}{\text{حد}}\frac{x-۱}{\sqrt[۴]{x}-۱} = \underset{x\to۱}{\text{حد}}\frac{(x-۱)(\sqrt[۴]{x^{۳}}+\sqrt[۴]{x^{۲}}+\sqrt[۴]{x}+۱)}{x-۱} = ۴$$

....

$$\underset{x\to۱}{\text{حد}}\frac{x-۱}{\sqrt[n]{x}-۱} = \underset{x\to۱}{\text{حد}}\frac{(x-۱)(\sqrt[n]{x^{n-۱}}+\sqrt[n]{x^{n-۲}}+\ldots+۱)}{x-۱} = n$$

و بنابراین

$$\underset{x\to ۱}{\text{حد}}\, y = ۲\times ۳\times ۴\times \ldots \times n = n!$$

۵۲. ۱) درنقطه $x = ۰$؛ $\underset{x\to ۰^-}{\text{حد}} = -\infty$ و $\underset{x\to ۰^+}{\text{حد}}\, y = +\infty$.

۲) در نقطهٔ $x = -۲$؛ $\underset{x\to -۲^-}{\text{حد}}\, y = +\infty$ و $\underset{x\to -۲^+}{\text{حد}}\, y = +\infty$ (وقتی $x \to -۲$، صورت کسر منفی است).

۳) در نقطه‌های $x = ۲$ و $x = ۵$ و

$$\underset{c\to ۲^-}{\text{حد}}\, y = +\infty, \quad \underset{x\to ۲^+}{\text{حد}}\, y = -\infty;$$
$$\underset{x\to ۵^-}{\text{حد}}\, y = -\infty, \quad \underset{x\to ۵^+}{\text{حد}}\, y = +\infty$$

۴) پاسخ. $\underset{x\to ۱^-}{\text{حد}}\, y = -\frac{۱}{۲}$ و $\underset{x\to ۱^+}{\text{حد}}\, y = \frac{۱}{۲}$ (توجه کنید: وقتی $x < ۱$، آن‌وقت $(|x-۱|) = -(x-۱)$).

۵) درنقطه $x = ۰$ ناپیوسته‌است و $\underset{x\to ۰^-}{\text{حد}} = -۱$، $\underset{x\to ۰^+}{\text{حد}}\, y = ۱$.

۶) درنقطه $x = ۰$؛ $\underset{x\to ۰}{\text{حد}}\, f(x) = f(۰) = ۰$. $\underset{x\to ۰^+}{\text{حد}}\, f(x) = -۱$.

۷) هریک از رادیکال‌ها را ساده می‌کنیم (با شرط $\sin x \neq \pm ۱$ و $\cos x \neq \pm ۱$):

$$\sqrt{\frac{۱+\cos x}{۱-\cos x}} = \sqrt{\frac{(۱+\cos x)^۲}{۱-\cos^۲ x}} = \sqrt{\frac{(۱+\cos x)^۲}{\sin^۲ x}} = \frac{۱+\cos x}{|\sin x|};$$

$$\sqrt{\frac{۱-\cos x}{۱+\cos x}} = \frac{۱-\cos x}{|\sin x|};$$

$$\sqrt{\frac{۱+\sin x}{۱-\sin x}} = \frac{۱+\sin x}{|\cos x|}; \quad \sqrt{\frac{۱-\sin x}{۱+\sin x}} = \frac{۱-\sin x}{|\cos x|}$$

توجه کنید: $۱ \pm \sin x$ و $۱ \pm \cos x$، مقدارهایی نامنفی هستند و بنابراین

$$\sqrt{(۱\pm \sin x)^۲} = ۱\pm \sin x, \quad \sqrt{(۱\pm\cos x)^۲} = ۱\pm\cos x$$

به‌این ترتیب، y به‌این صورت درمی‌آید:

$$y = \left(\frac{۱ + \cos x}{|\sin x|} - \frac{۱ - \cos x}{|\sin x|}\right)\left(\frac{۱ + \sin x}{|\cos x|} - \frac{۱ - \sin x}{|\cos x|}\right) =$$

$$= \frac{۲\cos x}{|\sin x|} \times \frac{۲\sin x}{|\cos x|} = \frac{۴\sin x \cos x}{|\sin \alpha \sin x|} = \frac{۴\sin ۲x}{|\sin ۲x|}$$

اگر $\sin ۲x > ۰$، یعنی وقتی انتهای کمان x در ربع اول یا سوم دایره مثلثاتی باشد $y = ۴$ و وقتی $\sin ۲x < ۰$، آن‌وقت $y = -۴$:

$$y = \begin{cases} ۴ & \left(۲k\pi < x < ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} \text{ یا } (۲k+۱)\pi < x < ۲k\pi + \frac{۳\pi}{۲}\right) \\ -۴ & \left(۲k\pi + \frac{\pi}{۲}\right) < x < (۲k+۱)\pi \text{ یا } ۲k\pi + \frac{۳\pi}{۲} < x < ۲(k+۱)\pi \end{cases}$$

y در نقطه‌های ۰، $\frac{\pi}{۲}$، π، $\frac{۳\pi}{۲}$، ۲π، ... یا به‌طور کلی در نقطه‌های $x = \frac{۱}{۲}k\pi$ ناپیوسته است. برای حد چپ و حد راست تابع در این نقطه‌ها، به‌عنوان مثال

$$\lim_{x\to ۰^-} y = -۴ \text{ و } \lim_{x\to ۰^+} y = ۴;$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}^-} y = ۴, \quad \lim_{x\to \frac{\pi}{۲}^+} y = -۴$$

۸) y به‌ازای $x = -۱$ برابر -۲ و درضمن

$$\lim_{x\to -۱^-} y = -۲ \text{ و } \lim_{x\to -۱^+} = -۱$$

در نقطهٔ $x = -۱$، مقدار تابع با حد چپ آن در این نقطه برابر، ولی با حد راست آن نابرابر است. تابع در نقطهٔ $x = -۱$ ناپیوسته است.

۹) تابع در نقطهٔ $x = ۰$ ناپیوسته است، زیرا برای $x = ۰$ داریم $y = \sqrt{۲}$ و

$$\lim_{x\to ۰^-} y = \lim_{x\to ۰^-} \frac{۲\sin x \cos x}{\sqrt{۲}|\sin x|} = -\sqrt{۲},$$

$$\lim_{x\to 0^+} y = \lim_{x\to 0^+} \frac{۲\sin x\cos x}{\sqrt{۲}|\sin x|} = \sqrt{۲}$$

در نقطهٔ $x = ۰$، مقدار تابع با حد راست آن در این نقطه برابر است، ولی با حد چپ آن برابر نیست. تابع در همهٔ نقطه‌های $x = k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$ و $k \neq ۰$) هم ناپیوسته است، زیرا در این نقطه‌ها، مقداری برای تابع پیدا نمی‌شود.

۵۳. باید ثابت کنیم، برای هر عدد مثبت دلخواه ε، مثلاً $\varepsilon = \frac{۱}{۱۰۰۰}$، می‌توان شماره‌ای برای جمله‌های دنباله (N) پیدا کرد، که از آن به‌بعد، یعنی برای هر $n \geq N$ داشته باشیم:

$$\left|\frac{۲n+۳}{۲n+۱} - ۱\right| < \frac{۱}{۱۰۰۰}$$

چون $\frac{۲n+۳}{۲n+۱} - ۱ = \frac{۲}{۲n+۱}$، بنابراین باید داشته باشیم

$$\frac{۲}{۲n+۱} < \frac{۱}{۱۰۰۰} \Rightarrow \frac{۱}{۲n+۱} < \frac{۱}{۲۰۰۰}$$

که از آن نتیجه می‌شود $۲n+۱ > ۲۰۰۰$ و $N \geq ۱۰۰۰$. جمله‌های دنباله، با آغاز از جملهٔ هزارم، همگی اختلافی کمتر از $\frac{۱}{۱۰۰۰}$ با عدد ۱ دارند.

۵۴. کسر را به‌این صورت تبدیل می‌کنیم:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+۵}{n+۲}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{n+۵}{n}\right)^n}{\left(\frac{n+۲}{n}\right)^n} =$$

$$= \underset{n\to\infty}{\text{حد}} \frac{\left(1+\frac{5}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n} = \frac{e^5}{e^2} = e^3$$

۵۵. برای رفع ابهام در تابع مثلثاتی، باید از این دستور استفاده کنیم (مگر این‌که، به‌خودی خود ساده شود):

$$\underset{x\to 0}{\text{حد}} \left(\frac{\sin x}{x}\right) = 1$$

۱) $\underset{x\to 0}{\text{حد}} \frac{\tan x}{x} = \underset{x\to 0}{\text{حد}} \left(\frac{\sin x}{x}\right) \cdot \frac{1}{\cos x} = 1;$

۲) $\underset{x\to 0}{\text{حد}} \frac{\sin 3x}{\sin 2x} = \underset{x\to 0}{\text{حد}} \frac{3\sin x - 4\sin^3 x}{2\sin x \cos x} =$

$$= \underset{x\to 0}{\text{حد}} \frac{3 - 4\sin^2 x}{2\cos x} = \frac{3}{2};$$

۳) $\underset{x\to 1}{\text{حد}} \frac{x^{200} - 2x + 1}{x^{100} - 2x + 1} = \underset{x\to 1}{\text{حد}} \frac{(x^{200}-1) - 2(x-1)}{(x^{100}-1) - 2(x-1)} =$

$$= \underset{x\to 1}{\text{حد}} \frac{(x-1)(x^{199} + x^{198} + \ldots + x + 1) - 2(x-1)}{(x-1)(x^{99} + x^{98} + \ldots + x + 1) - 2(x-1)} =$$

$$= \underset{x\to 1}{\text{حد}} \frac{x^{199} + x^{198} + \ldots + x - 1}{x^{99} + x^{98} + \ldots + x - 1} = \frac{198}{98} = \frac{99}{49};$$

۴) $z = \pi - x$ می‌گیریم، در این صورت $x = \pi - z$. درضمن وقتی x به‌سمت π میل کند، z به‌سمت صفر میل می‌کند:

$$\underset{x\to \pi}{\text{حد}} \frac{\sin 3x}{\sin 2x} = \underset{z\to 0}{\text{حد}} \frac{\sin 3(\pi - z)}{\sin 2(\pi - z)} =$$

$$=\underset{z\to ۰}{\text{حد}}\ \frac{\sin(۳\pi-۳z)}{\sin(۲\pi-۲z)}=\underset{z\to ۰}{\text{حد}}\left(-\frac{\sin ۳z}{\sin ۲z}\right)=-\frac{۳}{۲}$$

(تمرین ۲ از مسالهٔ ۵۵ را ببینید)؛

۵) توجه کنید: وقتی در صورت مساله گفته شده، a به‌سمت b میل می‌کند، به‌معنای آن است که a متغیر و b ثابت است. بنابراین باید حد را برحسب b (مقدار ثابت) به‌دست آورد. برای گویا کردن صورت و مخرج، از این اتحاد استفاده می‌کنیم:

$$(x-y)(x^{p-۱}+x^{p-۲}y+\ldots+y^{p-۱})=x^p-y^p,\ (p\in \mathbf{N})$$

$$\underset{a-b}{\text{حد}}\ \frac{\sqrt[m]{a}-\sqrt[m]{b}}{\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}}=$$

$$=\underset{a\to b}{\text{حد}}\ \frac{(a-b)(\sqrt[n]{a^{n-۱}}+\sqrt[n]{a^{n-۲}b}+\ldots+\sqrt[n]{b^{n-۱}})}{(a-b)(\sqrt[m]{a^{m-۱}}+\sqrt[m]{a^{m-۲}b}+\ldots+\sqrt[m]{b^{m-۱}})}=$$

$$=\frac{n\sqrt[n]{b^{n-۱}}}{m\sqrt[m]{b^{m-۱}}};$$

۶) کسر را y می‌نامیم و بافرض $x\neq ۲k\pi$، آن را ساده می‌کنیم:

$$y=\frac{(۱-\cos x)+\sin x}{(۱-\cos ۲x)+\sin ۲x}=\frac{۲\sin^۲\frac{x}{۲}+۲\sin\frac{x}{۲}\cos\frac{x}{۲}}{۲\sin^۲ x+۲\sin x\cos x}=$$

$$=\frac{\sin\frac{x}{۲}\left(\sin\frac{x}{۲}+\cos\frac{x}{۲}\right)}{۲\sin\frac{x}{۲}\cos\frac{x}{۲}(\sin x+\cos x)}=\frac{\sin\frac{x}{۲}+\cos\frac{x}{۲}}{۲\cos\frac{x}{۲}(\sin x+\cos x)}$$

پاسخ. $\underset{x\to ۰}{\text{حد}}\ y=\frac{۱}{۲}$؛

۷) اگر کسر را y بنامیم، داریم:

$$y = \frac{\cos x - (۴\cos^۳ x - ۳\cos x)}{x^۲} =$$

$$= \frac{۴\cos x(۱ - \cos^۲ x)}{x^۲} = ۴\cos x\left(\frac{\sin x}{x}\right)^۲$$

پاسخ. $\underset{x\to ۰}{\text{حد}}\, y = ۴$؛

۸) **راهنمایی.** $\tan ۲x$ را برحسب $\tan x$ بنویسید و $\tan\left(\frac{\pi}{۴} - x\right)$ را باز کنید.

پاسخ. $\underset{x\to \frac{\pi}{۴}}{\text{حد}} \tan ۲x \tan\left(\frac{\pi}{۴} - x\right) = \frac{۱}{۲}$.

۹) $t = x - ۱$ فرض کنید. در این صورت $x = t + ۱$ و وقتی x به‌سمت ۱ میل کند، t به‌سمت صفر میل می‌کند و داریم:

$$\underset{x\to ۱}{\text{حد}}(۱ - x)\tan\frac{\pi x}{۲} = \underset{t\to ۰}{\text{حد}}[-t \cdot \tan\frac{\pi}{۲}(t + ۱)] =$$

$$\underset{t\to ۰}{\text{حد}}\left[-t \cdot \tan\left(\frac{\pi}{۲}t + \frac{\pi}{۲}\right)\right] =$$

$$= \underset{t\to ۰}{\text{حد}}\left[-t \cdot \left(-\cot\frac{\pi}{۲}t\right)\right] = \underset{t\to ۰}{\text{حد}}\left(\cos\frac{\pi}{۲}t \cdot \frac{t}{\sin\frac{\pi}{۲}t}\right) =$$

$$= \underset{t\to ۰}{\text{حد}}\left[\cos\frac{\pi}{۲}t\left(\frac{\frac{\pi}{۲}t}{\sin\frac{\pi}{۲}t}\right) \cdot \frac{۲}{\pi}\right] = \frac{۲}{\pi};$$

۱۰) بعد از گویا کردن صورت کسر، از اتحاد $۱ - \cos\alpha = ۲\sin^۲\frac{\alpha}{۲}$

استفاده می‌کنیم. اگر کسر را y بنامیم، داریم:

$$y = \frac{۱ - \cos x}{(۱ + \sqrt{\cos x})(۱ - \cos \sqrt{x})} = \frac{۱}{۱ + \sqrt{\cos x}} \cdot \frac{sin^{۲} \frac{x}{۲}}{\sin^{۲} \frac{\sqrt{x}}{۲}} =$$

$$= \frac{۱}{۱ + \sqrt{\cos x}} \cdot \frac{\left(\frac{\sin \frac{x}{۲}}{\frac{x}{۲}}\right)^{۲}}{\left(\frac{\sin \frac{\sqrt{x}}{۲}}{\frac{\sqrt{x}}{۲}}\right)^{۲}} \cdot \frac{\frac{x^{۲}}{۴}}{\frac{x}{۴}} =$$

$$= \frac{x}{۱ + \sqrt{\cos x}} \cdot \frac{\left(\frac{\sin \frac{x}{۲}}{\frac{x}{۲}}\right)^{۲}}{\left(\frac{\sin \frac{\sqrt{x}}{۲}}{\frac{\sqrt{x}}{۲}}\right)^{۲}}$$

چون حد نسبت سینوس یک کمان بر خود کمان، وقتی کمان به‌سمت صفر میل کند، برابر است با ۱، یعنی

$$\underset{x \to ۰}{\text{حد}} \frac{\sin \frac{x}{۲}}{\frac{x}{۲}} = ۱ \quad \text{و} \quad \underset{x \to ۰}{\text{حد}} \frac{\sin \frac{\sqrt{x}}{۲}}{\frac{\sqrt{x}}{۲}} = ۱$$

پس $\lim\limits_{x\to 0} y = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{1+\sqrt{\cos x}} = 0$.

۱۱) عبارت را y می‌نامیم، سپس دو طرف را در $2^n \sin \frac{x}{2^n}$ ضرب می‌کنیم و آن را به این صورت می‌نویسیم:

$$2^n \sin \frac{x}{2^n} \cdot y = 2^{n-1} \left(2 \sin \frac{x}{2^n} \cos \frac{x}{2^n}\right) \cos \frac{x}{2^{n-1}} \cdot \cos \frac{x}{2^{n-2}} \dots \cos \frac{x}{2}$$

اگر از اتحاد $2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha$ استفاده کنیم، به‌ترتیب به‌دست می‌آید.

$$2^n \sin \frac{x}{2^n} y = 2^{n-2} \left(2 \sin \frac{x}{2^{n-1}} \cos \frac{x}{2^{n-1}}\right) \cos \frac{x}{2^{n-2}} \dots \cos \frac{x}{2} =$$

$$= 2^{n-3} \left(2 \sin \frac{x}{2^{n-2}} \cos \frac{x}{2^{n-2}}\right) \cos \frac{x}{2^{n-3}} \dots \cos \frac{x}{2} = \dots = \sin x$$

بنابراین $y = \dfrac{\sin x}{2^n \sin \dfrac{x}{2n}}$ و

$$\lim_{n\to\infty} y = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin x}{\left(\dfrac{\sin \frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}}\right) \cdot x} = \frac{\sin x}{x};$$

۱۲) مخرج کسر را محاسبه می‌کنیم:

$$2 \sin^2 x - 1 = \frac{2 \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} - 1 =$$

$$= \frac{\tan^2 x - 1}{1 + \tan^2 x} = \frac{(\tan x - 1)(\tan x + 1)}{1 + \tan^2 x}$$

بنابراین، اگر کسر را y بنامیم، داریم:

$$y = \frac{(۱ + \tan^۲ x)(\tan x - ۱)}{(\tan x - ۱)(\tan x + ۱)(\sqrt[۳]{\tan^۲ x} + \sqrt[۳]{\tan x} + ۱)}$$

بنابراین با حذف $\tan x - ۱$ از صورت و مخرج ($\tan x \neq ۱$)، به‌دست می‌آید:

$$\underset{x \to \frac{\pi}{۴}}{\text{حد}}\, y = \underset{x \to \frac{\pi}{۴}}{\text{حد}} \frac{۱ + \tan^۲ x}{(۱ + \tan x)(\sqrt[۳]{\tan^۲ x} + \sqrt[۳]{\tan x} + ۱)} = \frac{۱}{۳}$$

$$۱۳)\ \underset{x \to ۱}{\text{حد}} \sqrt{\frac{x^{۲m^۲} - ۱}{x^{۲n^۲} - ۱}} =$$

$$= \underset{x \to ۱}{\text{حد}} \sqrt{\frac{(x - ۱)(x^{۲m^۲ - ۱} + x^{۲m^۲ - ۲} + \ldots + x + ۱)}{(x - ۱)(x^{۲n^۲ - ۱} + x^{۲n^۲ - ۲} + \ldots + x + ۱)}} =$$

$$= \underset{x \to ۱}{\text{حد}} \sqrt{\frac{x^{۲m^۲ - ۱} + \ldots + x + ۱}{x^{۲n^۲ - ۱} + \ldots + x + ۱}} = \sqrt{\frac{۲m^۲}{۲n^۲}} = \frac{m}{n}$$

۵۶. عبارت داخل پرانتز را ساده می‌کنیم و به‌صورت یک کسر درمی‌آوریم:

$$\frac{x^۲ + ۱}{x + ۱} - mx - n = \frac{(۱ - m)x^۲ - (m + n)x + (۱ - n)}{x + ۱}$$

برای این‌که حد این کسر، وقتی $x \to +\infty$، برابر صفر شود، باید درجهٔ صورت کسر کوچکتر باشد. مخرج کسر از درجهٔ اول است، بنابراین صورت کسر باید از درجهٔ صفر باشد، یعنی ضریب‌های درجه دوم و درجهٔ اول در صورت کسر، برابر صفر شود:

$$\begin{cases} ۱ - m = ۰ \\ m + n = ۰ \end{cases} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} m = ۱ \\ n = -۱ \end{array} \right.$$

۵۷. برای این‌که $f(x)$ در نقطهٔ $x = ۰$ پیوسته باشد، باید مقدارهای $f(۰)$ و $\underset{x\to ۰^+}{\text{حد}} f(x)$ و $\underset{x\to ۰^-}{\text{حد}} f(x)$ با هم برابر باشند. داریم:

$$f(۰) = q + \left[۰ - \frac{\pi}{۲}\right] = q - ۲,$$

$$\underset{x\to ۰^+}{\text{حد}} f(x) = \underset{x\to ۰^+}{\text{حد}} \left(\frac{px}{x} - ۱\right) = p - ۱$$

$$\underset{x\to ۰^-}{\text{حد}} f(x) = \underset{x\to ۰^-}{\text{حد}} ([-\varepsilon] + ۴) = ۳ \quad (۰ < \varepsilon < ۱)$$

بنابراین باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} p - ۱ = ۳ \\ q - ۲ = ۳ \end{cases} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} p = ۴ \\ q = ۵ \end{array} \right.$$

۵۸. باید حد چپ و حد راست $f(x)$ با مقدار $f(x)$ در نقطه‌های $x = \frac{\pi}{۲}$ و $x = -\frac{\pi}{۲}$ برابر باشند. داریم:

$$f\left(\frac{\pi}{۲}\right) = ۵ + \cos\frac{\pi}{۲} = ۵, \quad \underset{x\to \frac{\pi}{۲}^+}{\text{حد}} f(x) = ۵,$$

$$\underset{x\to \frac{\pi}{۲}^-}{\text{حد}} f(x) = \underset{x\to \frac{\pi}{۲}^-}{\text{حد}} (۲m\sin x + n) = ۲m + n$$

یعنی برای پیوستگی تابع در نقطهٔ $x = \frac{\pi}{۲}$، باید داشته باشیم: $۲m+n = ۵$. سپس

$$f\left(-\frac{\pi}{۲}\right) = -۲\sin\left(-\frac{\pi}{۲}\right) = ۲,$$

$$\underset{x\to -\frac{\pi}{۲}^-}{\text{حد}} f(x) = ۲$$

$$\underset{x\to -\frac{\pi}{۲}^+}{\text{حد}} f(x) = \underset{x\to -\frac{\pi}{۲}^+}{\text{حد}} (۲m\sin x + n) = -۲m + n$$

بنابراین، برای وجود پیوستگی تابع در نقطهٔ $x = -\frac{\pi}{۲}$ باید داشته باشیم:
$-۲m + n = ۲$ و درنتیجه

$$\begin{cases} ۲m + n = ۵ \\ -۲m + n = ۲ \end{cases} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} m = \frac{۳}{۴} \\ n = \frac{۷}{۲} \end{array} \right.$$

۵۹. باید داشته باشیم $a = -۱$ و $c = ۱$، درغیر این صورت، هر دو حد برابر بی‌نهایت ($+\infty$ یا $-\infty$) می‌شوند. (گفته بودیم، اگر دو جملهٔ هم‌درجه در عبارتی وجود داشته باشد، وقتی متغیر به‌سمت بی‌نهایت میل می‌کند، می‌توان تنها جمله‌ای را در نظر گرفت که ضریب آن از لحاظ قدرمطلق بیشتر است). اکنون به محاسبهٔ حدها می‌پردازیم:

$$\underset{x\to-\infty}{\text{حد}}(\sqrt{x^۲ - x + ۱} + x - b) = \underset{x\to-\infty}{\text{حد}} \frac{(x^۲ - x + ۱) - (x - b)^۲}{\sqrt{x^۲ - x + ۱} - x + b}$$
$$= \underset{x\to-\infty}{\text{حد}} \frac{(۲b - ۱)x + ۱ - b^۲}{\sqrt{x^۲ - x + ۱} - x + b}$$

باید این حد برابر صفر شود، یعنی باید درجهٔ صورت از درجهٔ مخرج کمتر باشد و این ممکن نیست، مگر داشته باشیم:

$$۲b - ۱ = ۰ \Rightarrow b = \frac{۱}{۲}$$

به‌همین ترتیب، به‌دست می‌آید: $a = -\frac{۱}{۲}$.

۶۰. در آغاز صورت کسر را تجزیه می‌کنیم:

$$\sin(۲x + a) - ۲\sin(x + a) + \sin a =$$
$$= [\sin(۲x + a) + \sin a] - ۲\sin(x + a) =$$

$$= ۲\sin(x+a)\cos x - ۲\sin(x+a) =$$
$$= -۲\sin(x+a)(۱-\cos x) = -۴\sin(x+a)\sin^۲\frac{x}{۲}$$

بنابراین، برای حد کسر مفروض داریم:

$$\underset{x\to ۰}{\text{حد}}\ \frac{-۴\sin(x+a)\sin^۲\frac{x}{۲}}{x^۲} =$$
$$= \underset{x\to ۰}{\text{حد}}\left[\left(\frac{\sin\frac{x}{۲}}{\frac{x}{۲}}\right)^۲ \times \frac{۱}{۴} \times -۴\sin(a+x)\right] = -\sin a$$

۶۱. برای $[x]$، وقتی $x \to ۰$ داریم:

$$\underset{x\to ۰^-}{\text{حد}}[x] = -۱, \quad \underset{x\to ۰^+}{\text{حد}}[x] = ۰, \quad [۰] = ۰$$

اگر $۰ < \varepsilon$ را مقداری بسیار کوچک بگیریم (و مثلاً $\varepsilon = ۰/۰۰۰۱$) داریم:

$$x = \varepsilon \Rightarrow [\varepsilon] = ۰, \quad [-\varepsilon] = -۱$$

بنابراین

$$\underset{x\to ۰^-}{\text{حد}}\frac{[x]}{x} = \underset{\varepsilon\to ۰}{\text{حد}}\frac{-۱}{-\varepsilon} = +\infty, \quad \underset{x\to ۰^+}{\text{حد}}\frac{[x]}{x} = \frac{۰}{\varepsilon} = ۰$$

(در حالت حد سمت راست، صورت کسر صفر مطلق است، درحالی‌که مخرج عدد است اگرچه عددی کوچک).

$$\underset{x\to ۰^-}{\text{حد}}\frac{x}{[x]} = \underset{x\to ۰^-}{\text{حد}}\frac{-\varepsilon}{-۱} = ۰, \quad \underset{x\to ۰^+}{\text{حد}}\frac{x}{[x]} = \frac{\varepsilon}{۰} = +\infty$$

۶۲. برای $\varepsilon > ۰$، N را عددی طبیعی می‌گیریم که به‌ازای $n > N$ داشته باشیم: $|x_n| < \frac{\varepsilon}{۲}$؛ درضمن، بزرگترین عدد از بین عددهای $|x_۱|$، $|x_۲|$، ...، $|x_N|$ را a می‌نامیم:

$$a = \max\{|x_۱|, |x_۲|, \ldots, |x_N|\}$$

میانگین حسابی جمله‌های دنباله از $x_۱$ تا x_n را S_n می‌نامیم:

$$S_n = \frac{x_۱ + x_۲ + \ldots + x_n}{n}$$

و فرض می‌کنیم: $M = \frac{۲aN}{\varepsilon}$.
اگر $n > \max\{N, M\}$، آن‌وقت

$$|S_n| = \left|\frac{x_۱ + \ldots + x_N}{n} + \frac{x_{N+۱} + \ldots + x_n}{n}\right| \leq$$
$$\leq \frac{|x_۱| + \ldots + |x_N|}{n} + \frac{|x_{N+۱}| + \ldots + |x_n|}{n} \leq$$
$$\leq \frac{Na}{n} + \frac{\varepsilon}{۲} \cdot \frac{N-n}{n} < \frac{\varepsilon}{۲} + \frac{\varepsilon}{۲} = \varepsilon$$

که درستی حکم مساله را ثابت می‌کند.

۶۳. این دنباله، از جملهٔ $a_۲$ آغاز می‌شود (بنابه تنظیمی که برای a_n در نظر گرفته‌اند). سه جملهٔ اول دنباله چنین است:

$$\sqrt{۲}, \quad \sqrt{۲ + \sqrt[۳]{۳}}, \quad \sqrt{۲ + \sqrt[۳]{۳ + \sqrt[۴]{۴}}}$$

و روشن است که دنباله‌ای صعودی است.

برای اثبات حکم مساله، از دو نابرابری استفاده می‌کنیم.

۱) نابرابری $\sqrt[k]{k+1} > 1$ $(k \in \mathbf{N})$ که روشن است.

۲) $\sqrt[k]{k} < \sqrt[k]{k+2} < 2$ $(k > 2)$. درستی نابرابری سمت چپ، یعنی $\sqrt[k]{k} < \sqrt[k]{k+2}$ روشن است. نابرابری سمت راست به‌صورت $k + 2 < 2^k$ درمی‌آید که برای $k = 3$ به‌صورت $5 < 8$ و برای $k = 4$ به‌صورت $6 < 16$ درمی‌آید. روشن است که، برای مقدارهای بعدی k هم درست است، زیرا در هر گام به سمت چپ نابرابری یک واحد اضافه می‌شود، درحالی که سمت راست آن دو برابر می‌شود. از نابرابری‌های ۲)، درضمن نتیجه می‌شود: $\sqrt[k]{k} < 2$ $(k > 2)$.

باتوجه به نابرابری اخیر داریم (به‌جای $\sqrt[n]{n}$، عدد بزرگترِ ۲ را قرار می‌دهیم):

$$a_n = \sqrt{2 + \sqrt[3]{3 + \ldots \sqrt[n]{n}}} <$$
$$< \sqrt{2 + \sqrt[3]{3 + \ldots + \sqrt[n-1]{n - 1 + 2}}}$$

آخرینِ رادیکال، یعنی $\sqrt[n-1]{(n-1) + 2}$ از ۲ کوچکتر است؛ اگر به‌جای آن عدد بزرگتر ۲ را قرار دهیم، به‌دست می‌آید:

$$a_n < \sqrt{2 + \sqrt[3]{3 + \ldots + \sqrt[n-2]{(n-2) + 2}}}$$

اگر به‌همین ترتیب ادامه دهیم

$$a_n < \sqrt{2 + \sqrt[3]{3 + 2}} < \sqrt{2 + 2} = \sqrt{4} = 2$$

سپس، چون برای $k > 1$ داریم $\sqrt[k]{k} > 1$، پس

$$a_n > \sqrt{2 + \sqrt[3]{3 + \ldots + \sqrt[n-1]{n}}} > \ldots$$
$$\ldots > \sqrt{2 + \sqrt[3]{3 + \sqrt[4]{5}}} > 1/9$$

و به‌این ترتیب $۱/۹ < a_n < ۲$.

۶۴. داریم:

$$x\left[\frac{۱}{x}\right] = x\cdot\left(\frac{۱}{x} - \left\{\frac{۱}{x}\right\}\right) = ۱ - x\left\{\frac{۱}{x}\right\}$$

$\left\{\frac{۱}{x}\right\}$ بخش کسری عدد $\frac{۱}{x}$ و همیشه مثبت است: $۰ \leq \left\{\frac{۱}{x}\right\} < ۱$. x بی‌نهایت کوچک است (زیرا x، به‌سمت صفر میل می‌کند)، ولی $\left\{\frac{۱}{x}\right\}$ مقداری است محدود، بنابراین

$$\underset{x\to ۰}{\text{حد}}\, x\left\{\frac{۱}{x}\right\} = ۰$$

به‌این ترتیب، حد مفروض وجود دارد و برابر است با ۱.

۶۵. ۱) وقتی $x \to ۲^-$، آن‌وقت $[x^۲] = ۳$ و وقتی $x \to ۲^+$ آن‌وقت $[x^۲] = ۴$، بنابراین

$$\underset{x\to ۲^-}{\text{حد}}\, \frac{[x^۲]-۴}{x^۲-۴} = +\infty \quad \text{و} \quad \underset{x\to ۲^+}{\text{حد}}\, \frac{[x^۲]-۴}{x^۲-۴} = ۰$$

در واقع وقتی $x \to ۲^-$، صورت کسر برابر -۱ می‌شود و مخرج کسر عددی بی‌نهایت کوچک ولی منفی است (چون $x < ۲$)، بنابراین حد کسر برابر $+\infty$ خواهد بود. در حالتی $x \to ۲^+$، صورت کسر برابر صفر است (صورت کسر به‌سمت صفر میل نمی‌کند، بلکه برابر صفر مطلق است)، ولی مخرج کسر عدد است (البته بی‌نهایت کوچک)، درنتیجه حد کسر برابر صفر می‌شود.

۲) دامنهٔ کسر با شرطهای $x \geq ۰$ و $x \neq ۱$ تعیین می‌شود. وقتی $x \to ۱^-$ به‌معنای این است که $x < ۱$ و درنتیجه

$$\underset{x\to ۱^-}{\text{حد}}\, \frac{|x^۲-۳x+۲|}{\sqrt{x}-۱} = \underset{x\to ۱^-}{\text{حد}}\, \frac{-(x-۱)|x-۲|(\sqrt{x}+۱)}{x-۱} = ۲$$

و به‌همین ترتیب $-۲ = \text{حد}_{x\to ۱^+} \dfrac{|x^۲ - ۳x + ۲|}{\sqrt{x} - ۱}$

مشتق

۶۶. ۱) باید حد $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ را، وقتی $\Delta x \to ۰$، پیدا کنیم:

$$y' = \text{حد}_{\Delta x\to ۰} \frac{(۲x + ۲\Delta x + ۱)^۲ - (۲x + ۱)^۲}{\Delta x} =$$

$$= \text{حد}_{\Delta x\to ۰} \frac{۲ \times ۲\Delta x(۲x + ۱) + ۴(\Delta x)^۲}{\Delta x} =$$

$$= \text{حد}_{\Delta x\to ۰} [۴(۲x + ۱) + ۴(\Delta x)] = ۴(۲x + ۱)$$

$$۲)\ \Delta y = \frac{۱}{x + \Delta x - ۳} - \frac{۱}{x - ۳} =$$

$$\frac{x - ۳ - (x + \Delta x - ۳)}{(x + \Delta x - ۳)(x - ۳)} = \frac{-\Delta x}{(x + \Delta x - ۳)(x - ۳)}$$

که از آن‌جا به‌دست می‌آید:

$$y' = \text{حد}_{\Delta x\to ۰} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{حد}_{\Delta x\to ۰} \frac{-۱}{(x + \Delta x - ۳)(x - ۳)} = -\frac{۱}{(x - ۳)^۲}$$

$$۳)\ y' = \text{حد}_{\Delta x\to ۰} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{حد}_{\Delta x\to ۰} \frac{\frac{۱}{۳}(x + \Delta x)^۳ - \frac{۱}{۳}x^۳}{\Delta x} =$$

$$= \text{حد}_{\Delta x\to ۰} \left[x^۲ + x(\Delta x) + \frac{۱}{۳}(\Delta x)^۲\right] = x^۲$$

$$۴)\ \Delta y = \sqrt{۱ + ۲x + ۲\Delta x} - \sqrt{۱ + ۲x} =$$

$$= \frac{(۱ + ۲x + ۲\Delta x) - (۱ + ۲x)}{\sqrt{۱ + ۲x + ۲\Delta x} + \sqrt{۱ + ۲x}} =$$

$$= \frac{۲\Delta x}{\sqrt{۱ + ۲x + ۲\Delta x} + \sqrt{۱ + ۲x}};$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to ۰} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{۱}{\sqrt{۱ + ۲x}}$$

۶۷. برای مشتق‌گیری از یک عبارت گنگ می‌توان رادیکال را به‌صورت توان کسری نوشت و از قاعدهٔ کلیِ

$$y = u^p \Rightarrow y' = pu'u^{p-۱}$$

استفاده کرد. ولی ساده‌تر این است که مشتق $y = \sqrt[m]{u}$ را به‌طور مستقل پیدا کنیم و به‌عنوان یک قانون به‌کار ببریم:

$$y = \sqrt[m]{u} = u^{\frac{۱}{m}}, \quad (m \geq ۲)$$
$$y' = \frac{۱}{m}u'u^{\frac{۱}{m}-۱} = \frac{۱}{m}u'u^{-\frac{m-۱}{m}} = \frac{u'}{m\sqrt[m]{u^{m-۱}}}$$

یعنی، مشتق یک رادیکال کسری است که صورت عبارت است از مشتق عبارت زیر رادیکال و مخرج آن حاصل‌ضرب عددِ فُرجه در خود رادیکال با توان یک واحد کمتر از فرجه است. به‌عنوان نمونه، برای $y = \sqrt{x^۲ - ۳x}$ داریم:

$$y' = \frac{(x^۲ - ۳x)'}{۲\sqrt{x^۲ - ۳x}} = \frac{۲x - ۳}{۲\sqrt{x^۲ - ۳x}}$$

و برای $y = \sqrt[۵]{(x^۲ - ۱)^۳}$ داریم:

$$y' = \frac{[(x^۲ - ۱)^۳]'}{۵\sqrt[۵]{[(x^۲ - ۱)^۳]^۴}} = \frac{۳ \times ۲x(x^۲ - ۱)^۲}{۵\sqrt[۵]{(x^۲ - ۱)^{۱۲}}} =$$
$$= \frac{۶x(x^۲ - ۱)^۲}{۵(x^۲ - ۱)^۲\sqrt[۵]{(x^۲ - ۱)^۲}} = \frac{۶x}{۵\sqrt[۵]{(x^۲ - ۱)^۲}}$$

اکنون به حل تمرین‌های مسالهٔ ۶۷ می‌پردازیم:

$$۱)\ y' = \frac{(۱+\sqrt{x})'(۱-\sqrt{x}) - (۱-\sqrt{x})'(۱+\sqrt{x})}{(۱-\sqrt{x})^۲} =$$

$$= \frac{\frac{۱}{۲\sqrt{x}}(۱-\sqrt{x}) + \frac{۱}{۲\sqrt{x}}(۱+\sqrt{x})}{(۱-\sqrt{x})^۲} =$$

$$= \frac{\frac{۱}{\sqrt{x}}}{(۱-\sqrt{x})^۲} = \frac{۱}{\sqrt{x}(۱-\sqrt{x})^۲}$$

$$۲)\ y' = \frac{(x-۱)'\sqrt{۱-x-x^۲} - (\sqrt{۱-x-x^۲})'(x-۱)}{(\sqrt{۱-x-x^۲})^۲} =$$

$$= \frac{\sqrt{۱-x-x^۲} + \frac{۲x+۱}{۲\sqrt{۱-x-x^۲}}(x-۱)}{۱-x-x^۲} =$$

$$= \frac{۲(۱-x-x^۲) + (۲x+۱)(x-۱)}{۲(۱-x-x^۲)\sqrt{۱-x-x^۲}} =$$

$$= \frac{-۳x+۱}{۲(۱-x-x^۲)\sqrt{۱-x-x^۲}}$$

۳) **پاسخ.** $y' = \frac{-۱}{\sqrt{a^۲+x^۲}(x+\sqrt{a^۲+x^۲})}$.

۴) **پاسخ.** $y' = -\frac{x^۲+۱}{۴x\sqrt{x}}$.

۵) **پاسخ.** $y' = \frac{x(۲۰-۳x^۲)}{\sqrt{۱۰-x^۲}}$.

۶) پاسخ. $y' = -\frac{x+8}{x^3\sqrt{x^2+4}}$.

$$\begin{aligned}
7)\ y' &= 40(x^2-3x+1)'(x^2-3x+1)^{39} = \\
&= 40(2x-3)(x^2-3x+1)^{39}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
8)\ y' &= 300(3x+1)^{99}(x^2-x+1)^{50} + \\
&+50(2x-1)(x^2-x+1)^{49}(3x+1)^{100} = \\
&= 50(3x+1)^{99}(x^2-x+1)^{49}[6(x^2-x+1) + \\
&+(2x-1)(3x+1)] = \\
&= 50(3x+1)^{99}(x^2-x+1)^{49}(12x^2-7x+5)
\end{aligned}$$

۹) وقتی تابعی به‌صورت $y = uvw$ باشد که در آن u، v و w تابع‌هایی از متغیر x هستند، برای مشتق گرفتن از آن، اگر uv را یک تابع در نظر بگیریم، برای مشتق آن به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}
y' &= (uv)' \cdot w + (uv) \cdot w' = (u'v + v'u) \cdot w + uvw' = \\
&= u'vw + v'uw + w'uv
\end{aligned}$$

به‌این ترتیب، برای مشتق حاصل‌ضرب سه تابع، باید مشتق تابع اول را در حاصل‌ضرب دو تابع دوم و سوم، بعد مشتق تابع دوم را در حاصل‌ضرب دو تابع اول و سوم و سرانجام مشتق تابع سوم را درحاصل‌ضرب دو تابع اول و دوم ضرب و، سپس، حاصل ضرب‌ها را با هم جمع کرد. بنابراین، برای تمرین ۹ داریم:

$$\begin{aligned}
y' &= 14(x-1)^{13}(2x+1)^7(7x-2)^2 + \\
&+14(2x+1)^6(x-1)^{14}(7x-2)^2 + \\
&+14(7x-2)(x-1)^{14}(2x+1)^7 =
\end{aligned}$$

$$= ۱۴(x-۱)^{۱۳}(۲x+۱)^{۶}(۷x-۲)\times$$
$$\times[(۲x+۱)(۷x-۲)+(x-۱)(۷x-۲)+(x-۱)(۲x+۱)]$$
$$= ۱۴(۷x-۲)(۲۳x^{۲}-۷x-۱)(x-۱)^{۱۳}(۲x+۱)^{۶}$$

همیشه تلاش کنید، نتیجهٔ مشتق را به ساده‌ترین صورت ممکن درآورید.

۶۸. ۱) مواظب باشید: مشتق y^m نسبت به متغیر x، برابر $my'y^{m-۱}$ و مشتق xy نسبت به متغیر x، برابر $y+xy'$ است. بنابراین، اگر از دو طرف برابری مشتق بگیریم (نسبت به x)، به‌دست می‌آید (درضمن y'_x و x'_y عکس یکدیگرند):

$$۲x+۴yy'-۳(y+xy')+۱-y'=۰ \Rightarrow y'_x=\frac{۳y-۲x-۱}{۴y-۳x-۱};$$
$$۲)\ ۲xy^{۲}+x^{۲}(۲yy')+۴x^{۳}-y^{۳}-x(۳y^{۲}y')+y'=۰ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y'_x=\frac{y^{۳}-۲xy^{۲}-۴x^{۳}}{۲x^{۲}y-۳xy^{۲}+۱};$$
$$۳)\ \left(x'_t=\frac{-۱}{t^{۲}},\ y'_t=\frac{۱}{t^{۲}}\right) \Rightarrow y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=-۱$$

در واقع، اگر بین x و y، پارامتر t را حذف کنیم، به رابطه $y=۲-x$ می‌رسیم (خودتان عمل کنید) که مشتق آن $y'=-۱$ است.

$$۴)\ \left(x'_t=\frac{۱}{(۲-t)^{۲}},\quad y'_t=۶t\right) \Rightarrow y'_x=۶t(۲-t)^{۲}$$

در این معادله هم، t را برحسب x محاسبه کنید و با قرار دادن در y و y'_x، نتیجه‌ای را که به‌دست آورده‌ایم، آزمایش کنید.

۶۹. ۱) $|x|$ را به‌صورت $\sqrt{x^۲}$ می‌نویسیم و مشتق می‌گیریم:

$$y = \sqrt{x^۲}; \quad y' = \frac{۲x}{۲\sqrt{x^۲}} = \frac{x}{|x|}$$

یادداشت. می‌توانستیم، مشتق را در دو حالت مختلف به‌طور جداگانه محاسبه کنیم:

$$x > ۰ \quad y = x \Rightarrow y' = ۱$$
$$x < ۰ : \quad y = -x \Rightarrow y' = -۱$$

که با نتیجه‌ای که به‌دست آورده‌بودیم، تطبیق می‌کند. با این روش هم روشن می‌شود که مشتق، برای $x = ۰$ معین نیست. در واقع

$$\underset{x\to ۰^-}{\text{حد}}\, y' = -۱ \quad \text{و} \quad \underset{x\to ۰^+}{\text{حد}}\, y' = ۱$$

ولی روش قبل، این مطلب را روشن‌تر نشان می‌دهد: $\frac{x}{|x|}$ برای $x = ۰$ معنی ندارد، زیرا تقسیم بر صفر معین نیست.

$$۲)\ y' = |x| + \frac{x^۲}{|x|} = \frac{۲x^۲}{|x|} = \frac{۲|x|^۲}{|x|} = ۲|x|;$$

$$۳)\ y = (x-۱)^۲(x+۱)^۲|x+۱| = (x^۲-۱)^۲|x+۱|;$$

$$y' = ۴x(x^۲-۱)|x+۱| + (x^۲-۱)^۲ \cdot \frac{x+۱}{|x+۱|} =$$

$$= \frac{x^۲-۱}{|x+۱|}[(۴x)(x+۱) + (x^۲-۱)(x+۱)] =$$

$$= \frac{x+۱}{|x+۱|}(x^۲-۱)(x^۲+۴x-۱);$$

$$۴)\ y' = ۲xf'(x^۲)$$

$$۵)\ y' = f\left(\frac{۱-x^۲}{۱+x^۲}\right) + x\left(\frac{۱-x^۲}{۱+x^۲}\right)' f'\left(\frac{۱-x^۲}{۱+x^۲}\right)$$

$$= f\left(\frac{۱-x^۲}{۱+x^۲}\right) - \frac{۴x}{(۱+x^۲)^۲} f'\left(\frac{۱-x^۲}{۱+x^۲}\right)$$

$$۵)\ y' = f'(x)\cdot f'(f(x))$$

.۷۰

$$۱)\ y' = (۱+\tan^۲ x) - (۱+\cot^۲ x) = \tan^۲ x - \cot^۲ x =$$

$$= \frac{\sin^۲ x}{\cos^۲ x} - \frac{\cos^۲ x}{\sin^۲ x} = \frac{\sin^۴ x - \cos^۴ x}{\sin^۲ x\cos^۲ x} = \frac{\sin^۲ x - \cos^۲ x}{\sin^۲ x \cos^۲ x}$$

$$= \frac{۱}{\cos^۲ x} - \frac{۱}{\sin^۲ x} = \sec^۲ x - \operatorname{cosec}^۲ x$$

$\sec x$ (سکانت x) عکس $\cos x$ و $\operatorname{cosec} x$ (کوسکانت x)عکس $\sin x$.

$$۲)\ y' = \frac{(\cos x - \sin x)(\sin x - \cos x) - (\cos x + \sin x)(\sin x + \cos x)}{(\sin x - \cos x)^۲} =$$

$$= \frac{-۲}{(\sin x - \cos x)^۲}$$

$$۳)\ y' = \sin x + x\cos x;$$

۴) بهتر است کسر y را ساده کنیم؛ توجه کنیم $x \neq k\pi + \frac{\pi}{۲}$ (برای این‌که $\tan x$ معنا داشته باشد) و $x \neq k\pi$ (برای این‌که $\cot x$ معنا داشته باشد) و در نتیجه $\sin x \neq ۰$ و $\cos x \neq ۰$.

$$y = \frac{\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\sin x}} = \frac{\frac{\sin^۲ x + \cos^۲ x}{\sin x \cos x}}{\frac{\sin^۲ x - \cos^۲ x}{\sin x\cos x}} = \frac{-۱}{\cos ۲x};$$

$$y' = \frac{۲ \sin ۲x}{\cos^۲ ۲x} = \frac{۲ \tan ۲x}{\cos ۲x}$$

$$۵)\ y' = \frac{(۱ - \sin x)'}{۲\sqrt{۱ - \sin x}} = \frac{-\cos x}{۲\sqrt{۱ - \sin x}}$$

$$۶)\ y = \frac{\left(\frac{۱ - \sin x}{۱ + \sin x}\right)'}{۳\sqrt[۳]{\left(\frac{۱ - \sin x}{۱ + \sin x}\right)^۲}} = \frac{-۲\cos x}{۳(۱ + \sin x)^۲\sqrt[۳]{\left(\frac{۱ - \sin x}{۱ + \sin x}\right)^۲}} =$$

$$= \frac{-۲\cos x}{۳(۱ + \sin x)\sqrt[۳]{(۱ + \sin x)^۳\left(\frac{۱ - \sin x}{۱ + \sin x}\right)^۲}} =$$

$$\frac{-۲\cos x}{۳(۱ + \sin x)\sqrt[۳]{۱ - \sin^۲ x}} = \frac{-۲\cos x}{۳(۱ + \sin x)\sqrt[۳]{\cos^۲ x}} = \frac{-۲\sqrt[۳]{\cos x}}{۳(۱ + \sin x)}$$

$$۷)\ y' = (\cos x)' \cdot \cos(\cos x) = -\sin x \cdot \cos(\cos x)$$

در مثلثات کمان‌ها برحسب رادیان‌اند. وقتی می‌نویسیم $\sin ۲$ یعنی سینوس ۲ رادیان و وقتی می‌نویسیم $\sin(\cos x)$، کسینوس x یک عدد است و برحسب رادیان، بنابراین یعنی سینوس کمانی که برابر $\cos x$ رادیان است.

$$۸)\ y' = (\sqrt[۳]{x^۲})'(-\sin \sqrt[۳]{x^۲}) = -\frac{۲x}{۳x\sqrt[۳]{x}}\sin(\sqrt[۳]{x^۲})$$

$$۹)\ y' = ۴ \times \frac{(\cot^۲ x)'}{۳\sqrt[۳]{\cot^۴ x}} - \frac{(\cot^۸ x)'}{۳\sqrt[۳]{\cot^{۱۶} x}} =$$

$$= \frac{-۸\cot x(۱ + \cot^۲ x)}{۳\cot x\sqrt[۳]{\cot x}} - \frac{-۸\cot^۷ x(۱ + \cot^۲ x)}{۳\cot^۵ x\sqrt[۳]{\cot x}} =$$

$$= \frac{-۸(۱ + \cot^۲ x)}{۳\sqrt[۳]{\cot x}} + \frac{۸\cot^۲ x(۱ + \cot^۲ x)}{۳\sqrt[۳]{\cot x}} =$$

$$= \frac{۸(\cot^{۴} x - ۱)}{۳\sqrt[۳]{\cot x}} = \frac{۸\cos ۲x}{۳\sin^{۴} x\sqrt[۳]{\cot x}}$$

$$۱۰)\ y' = (\cos^{۲} x)' \cdot \cos(\cos^{۲} x) - (\sin^{۲} x)' \times$$

$$\times \sin(\sin^{۲} x) = -۲\sin x \cos x[\cos(\cos^{۲} x) + \sin(\sin^{۲} x)]$$

۱۱) اگر y را به‌صورت $\sin^{۲} x\sqrt{\sin^{۲} x}$ بنویسیم، به‌ترتیب داریم:

$$y' = ۲\sin x \cos x\sqrt{\sin^{۲} x} + \sin^{۲} x \cdot \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{\sin^{۲} x}} =$$

$$= \sin x \cos x \left(۲|\sin x| + \frac{|\sin x|^{۲}}{|\sin x|}\right) =$$

$$= \frac{۱}{۲}\sin ۲x(۲|\sin x| + |\sin x|) = \frac{۳}{۲}|\sin x|\sin ۲x$$

$$۱۲)\ y' = (\sin^{۲} x)'f'(\sin^{۲} x) + (\cos^{۲} x)'f'(\cos^{۲} x) =$$

$$= \sin ۲x[f'(\sin^{۲} x) - f'(\cos^{۲} x)]$$

$$۱۳)\ y' = ۵\sin^{۴} ۳x \cdot (\sin ۳x)' = ۱۵\sin^{۴} ۳x \cos ۳x$$

$$۱۵)\ y' = \frac{(\cos^{۲} ۷x)'}{۳\sqrt[۳]{\cos^{۴} ۷x}} = \frac{-۱۴\cos ۷x \sin ۷x}{۳\cos ۷x\sqrt[۳]{\cos ۷x}} = -\frac{۱۴\sin ۷x}{۳\sqrt[۳]{\cos ۷x}}$$

۷۱. وقتی می‌خواستیم مشتق تابع با ضابطهٔ $y = \sin x$ را پیدا کنیم، ضمن عمل، از این حد استفاده کردیم:

$$\lim_{\Delta x \to ۰} \frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{۲}\right)}{\left(\frac{\Delta x}{۲}\right)} = ۱$$

می‌دانیم نسبت $\frac{a}{b}$ زمانی معنی دارد که a و b با یک واحد بیان شده‌باشند. به‌عنوان نمونه، اگر طول یک راهرو ۶ متر و عرض آن ۱۲۰ سانتی‌متر باشد،

برای پیدا کردن نسبت طول راهرو به عرض آن، باید هردو برحسب متر یا هردو برحسب سانتی‌متر باشند، که در این صورت، نسبت طول به عرض $\frac{۶}{۱/۲}$ یا $\frac{۶۰۰}{۱۲۰}$، یعنی برابر ۵ می‌شود.

وقتی می‌گوییم تانژانت ۴۵ درجه برابر ۱ است، یعنی برابر شعاع است، زیرا در دایرهٔ مثلثاتی، شعاع واحد اندازه‌گیری است. بنابراین، نسبت $\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ وقتی معنی دارد که α هم با واحد شعاع اندازه‌گیری شود. ولی وقتی کمان دایره با واحد شعاع اندازه گرفته شود، نام رادیان را بر خود دارد. به این ترتیب، مشتق $y = \sin x$ وقتی به‌صورت $y' = \cos x$ درمی‌آید که x برحسب رادیان باشد.

می‌دانیم x درجه برابر است $\left(\frac{\pi}{۱۸۰}x\right)$ رادیان و x گراد برابر $\left(\frac{\pi x}{۲۰۰}\right)$ رادیان است. پس

$$y = \sin x^{\circ} = \sin\left(\frac{\pi}{۱۸۰}x\right);$$

$$y' = \frac{\pi}{۱۸۰}\cos\left(\frac{\pi}{۱۸۰}x\right) = \frac{\pi}{۱۸۰}\cos x^{\circ};$$

$$y = \cos x^{g} = \cos\left(\frac{\pi}{۲۰۰}x\right);$$

$$y' = \frac{\pi}{۲۰۰}\cos x^{g}$$

۷۲. با ۱۰۰۱ عامل سروکار داریم. برای محاسبهٔ $f'(x)$ باید مشتق هر عامل را در ۱۰۰۰ عامل دیگر ضرب و، سپس، نتیجه‌ها را با هم جمع کرد:

$$f'(x) = (x-۱)(x-۲)\dots(x-۱۰۰۰) + x(x-۲)\dots$$
$$\dots(x-۱۰۰۰) + x(x-۱)(x-۳)\dots(x-۱۰۰۰) + \dots +$$
$$+x(x-۱)\dots(x-۹۹۹)$$

اگر به‌جای x، عدد صفر را قرار دهیم، همهٔ جمله‌ها، به‌جز جملهٔ اول، برابر صفر می‌شوند و به‌دست می‌آید:

$$f'(۰) = (-۱)(-۲)\dots(-۱۰۰۰) = ۱۰۰۰!$$

چون ۱۰۰۰ عامل منفی در هم ضرب شده‌است، حاصل‌ضرب عددی مثبت می‌شود.

۷۳. راهنمایی. همه‌جا متغیری را که باید نسبت به آن مشتق بگیریم، z بنامید.

$$۱)\ y'_x = ۱;$$

$$۲)\ y = x = \frac{۱}{m}(mx) = \frac{۱}{m}z; \quad y'_z = \frac{۱}{m}$$

$$۳)\ y = x = \sqrt{x^۲} = \sqrt{z}; \quad y'_z = \frac{۱}{۲\sqrt{z}} = \frac{۱}{۲\sqrt{x^۲}} = \frac{۱}{۲x};$$

$$۴)\ y = x = (\sqrt{x})^۲ = z^۲; \quad y'_z = ۲z = ۲\sqrt{x};$$

$$۵)\ y = x = (\sqrt[۳]{x})^۳ = z^۳; \quad y'_z = ۳z^۲ = ۳\sqrt[۳]{x^۲}$$

۷۴. به‌ترتیب داریم:

$$x'_t = \frac{(۱-\sqrt{t})'}{۳\sqrt[۳]{(۱-\sqrt{t})^۲}} = -\frac{۱}{۶\sqrt{t}\cdot\sqrt[۳]{(۱-\sqrt{t})^۲}};$$

$$y'_t = \frac{(۱-\sqrt[۳]{t})'}{۲\sqrt{۱-\sqrt[۳]{t}}} = -\frac{۱}{۶\sqrt[۳]{t^۲}\cdot\sqrt{۱-\sqrt[۳]{t}}};$$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\sqrt{t}\cdot\sqrt[۳]{(۱-\sqrt{t})^۲}}{\sqrt[۳]{t^۲}\cdot\sqrt{۱-\sqrt[۳]{t}}} = \sqrt[۶]{\frac{(۱-\sqrt{t})^۴}{t(۱-\sqrt[۳]{t})^۳}}$$

۷۵. اگر $f(x)$ از درجهٔ n باشد $(n \in \mathbf{N})$، $f'(x)$ از درجهٔ $(n-۱)$ و، بنابراین $f(f'(x))$ از درجه $n(n-۱)$ می‌شود. در تمرین ۱، $f(f'(x))$

از درجهٔ دوم است، یعنی $n = ۲$ و در تمرین ۲، $f(f'(x))$ از درجه ششم است:

$$n(n-۱) = ۶ \Rightarrow n = ۳$$

(ریشهٔ منفی معادله، قابل قبول نیست). بنابراین

$$۱)\ f(x) = ax^۲ + bx + c \text{ و } f'(x) = ۲ax + b;$$
$$f(f'(x)) = a(۲ax+b)^۲ + b(۲ax+b) + c =$$
$$= ۴a^۳x^۲ + (۴a^۲b + ۲ab)x + (ab^۲ + b^۲ + c)$$

بنابراین، باتوجه به فرض مساله، باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} ۴a^۳ = ۴ \\ ۴a^۲b + ۲ab = -۶ \\ ab^۲ + b^۲ + c = ۲ \end{cases} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} a = ۱ \\ b = -۱ \\ c = ۰ \end{array} \right.$$

یعنی $f(x) = x^۲ - x$.

۲) در حالت کلی $f(x) = ax^۳ + bx^۲ + cx + d$. ولی چون همهٔ توان‌های $f(f'(x))$ زوج است، باید مشتق تنها شامل توان‌های زوج x باشد، یعنی $b = ۰$ و $f(x) = ax^۳ + cx + d$. داریم: $f'(x) = ۳ax^۲ + c$ و

$$f(f'(x)) = a(۳ax^۲ + c)^۳ + c(۳ax^۲ + c) + d =$$
$$= ۲۷a^۴x^۶ + ۲۷a^۳cx^۴ + ۳ac(۳ac + ۱)x^۲ + (ac^۳ + c^۲ + d)$$

اگر عبارت $f(f'(x))$ را که در این‌جا به‌دست آورده‌ایم با عبارت صورت مساله، متحد قرار دهیم، به دو گروه جواب می‌رسیم:

$$a = \pm ۱, \quad c = \mp ۱, \quad d = ۲$$

بنابراین، برای $f(x)$ دو جواب پیدا می‌شود:

$$f(x) = x^{۳} - x + ۲ \text{ یا } f(x) = -x^{۳} + x + ۲$$

۷۶. مشتق‌های اول و دوم $y = \frac{۱}{\sqrt{\cos ۲x}}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$y' = \frac{-(\sqrt{\cos ۲x})'}{\cos ۲x} = \frac{\sin ۲x}{\cos ۲x\sqrt{\cos ۲x}} = \frac{\sin ۲x}{\sqrt{\cos^{۳} ۲x}};$$

$$y'' = \frac{۲\cos ۲x \cdot \sqrt{\cos^{۳} ۲x} - (\sqrt{\cos^{۳} ۲x})' \sin ۲x}{\cos^{۳} ۲x} =$$

$$= \frac{۲\cos^{۲} ۲x\sqrt{\cos ۲x} - \frac{-۶\sin ۲x \cos^{۲} ۲x}{۲\sqrt{\cos^{۳} ۲x}} \cdot \sin ۲x}{\cos^{۳} ۲x} =$$

$$= \frac{۲\cos^{۴} ۲x + ۳\sin^{۲} ۲x\cos^{۲} ۲x}{\cos^{۴} ۲x\sqrt{\cos ۲x}} = \frac{۲\cos^{۲} ۲x + ۳\sin^{۲} ۲x}{\cos^{۲} ۲x\sqrt{\cos ۲x}} =$$

$$= \frac{۲ + \sin^{۲} ۲x}{\sqrt{\cos^{۵} ۲x}}$$

که اگر $y' + y''$ را محاسبه کنیم:

$$y + y'' = \frac{۱}{\sqrt{\cos ۲x}} + \frac{۲ + \sin^{۲} ۲x}{\sqrt{\cos^{۵} ۲x}} = \frac{\cos^{۲} ۲x + ۲ + \sin^{۲} ۲x}{\sqrt{\cos^{۵} ۲x}} =$$

$$= \frac{۳}{\sqrt{\cos^{۵} ۲x}} = ۳\left(\frac{۱}{\sqrt{\cos ۲x}}\right)^{۵} = ۳y^{۵}$$

یعنی ثابت باشد: $y' + y'' = ۳y^{۵}$. همان چیزی که می‌خواستیم.

۷۷. برای y داریم:

$$y = \frac{a-b}{x^{۲} - (a+b)x + ab} \Rightarrow \frac{۱}{y} = \frac{۱}{a-b}[x^{۲} - (a+b)x + ab]$$

کسر را معکوس کردیم تا به‌صورت عبارتی درجه دوم درآید و مشتق‌گیری از آن ساده باشد. اکنون از دو طرف برابری دو بار مشتق می‌گیریم (به یاد داشته باشیم که مشتق y برابر y' می‌شود):

$$-\frac{y'}{y^{۲}} = \frac{۱}{a-b}(۲x-a-b); \quad -\frac{y''y^{۲} - ۲yy'^{۲}}{y^{۴}} = \frac{۲}{a-b}$$

که پس از ساده کردن صورت و مخرج به y به‌دست می‌آید:

$$\frac{۲y'^{۲} - yy''}{y^{۳}} = \frac{۲}{a-b}$$

و همان‌طور که می‌بینید، مقدار کسر به x بستگی ندارد.

۷۸. y' و y'' را محاسبه می‌کنیم:

$$y' = n\left(۱ + \frac{x}{\sqrt{x^{۲}-۱}}\right)(x+\sqrt{x^{۲}-۱})^{n-۱} =$$

$$= n \cdot \frac{x+\sqrt{x^{۲}-۱}}{\sqrt{x^{۲}-۱}}(x+\sqrt{x^{۲}-۱})^{n-۱} = \frac{ny}{\sqrt{x^{۲}-۱}};$$

$$y'' = \frac{ny'\sqrt{x^{۲}-۱} - \frac{nxy}{\sqrt{x^{۲}-۱}}}{x^{۲}-۱} =$$

$$= \frac{ny'}{\sqrt{x^{۲}-۱}} - \frac{nxy}{(x^{۲}-۱)\sqrt{x^{۲}-۱}}$$

اکنون حاصل عبارت M را به‌دست می‌آوریم:

$$M = (x^{۲}-۱)\left(\frac{ny'}{\sqrt{x^{۲}-۱}} - \frac{nxy}{(x^{۲}-۱)\sqrt{x^{۲}-۱}}\right) + xy' - n^{۲}y$$

$$= ny'\sqrt{x^{۲}-۱} - \frac{nxy}{\sqrt{x^{۲}-۱}} + \frac{nxy}{\sqrt{x^{۲}-۱}} - n^{۲}y =$$

$$= ny'\sqrt{x^{۲}-۱} - n^{۲}y = n^{۲}y - n^{۲}y = ۰$$

پاسخ. $M = ۰$.

۷۹. راهنمایی. $\frac{۱}{y^۲}$ را به‌دست آورید و از برابری حاصل دو بار مشتق بگیرید.

پاسخ. $N = ۰$.

۸۰. مشتق $y = \sin x$ برابر است با $y' = \cos x$. ولی y' را می‌توان به‌صورت $y' = \sin\left(\frac{\pi}{۲} + x\right)$ نوشت. سپس، مشتق دوم هم برابر $y'' = \cos\left(\frac{\pi}{۲} + x\right)$ که می‌توان آن را به‌صورت $y'' = \sin\left(\frac{۲\pi}{۲} + x\right)$ نوشت. به‌این ترتیب، به‌طور کلی داریم:

$$(\sin(a + x))' = \sin\left(\frac{\pi}{۲} + a + x\right)$$

یعنی وقتی از $\sin(a + x)$ مشتق بگیریم، کافی است به کمان آن $\frac{\pi}{۲}$ اضافه کنیم. به‌این ترتیب

$$y' = \sin\left(\frac{\pi}{۲} + x\right),$$
$$y'' = \sin\left(\frac{۲\pi}{۲} + x\right), \ldots, y^{(n)} = \sin\left(\frac{n\pi}{۲} + x\right)$$

پاسخ. مشتق مرتبهٔ nام $\sin x$، به‌صورت $\sin\left(\frac{n\pi}{۲} + x\right)$ درمی‌آید.

۲) از $y = \frac{۱}{x - a}$ چند بار مشتق می‌گیریم:

$$y' = -\frac{۱}{(x - a)^۲}, \quad y'' = \frac{۱ \times ۲}{(x - a)^۳}, \quad y''' = -\frac{۱ \times ۲ \times ۳}{(x - a)^۴}$$

به‌این ترتیب، می‌توان حدس زد که مشتق مرتبهٔ kام به‌صورت

$$y^{(k)}=(-1)^k\frac{k!}{(x-a)^{k+1}}$$

درمی‌آید. برای اطمینان از درستی این استنباط، کافی است یک بار دیگر مشتق بگیریم و ببینیم مشتق مرتبهٔ $(k+1)$ام از قانونی که حدس زده‌ایم، پیروی می‌کند یا نه! داریم:

$$y^{(k+1)}=(-1)^k\frac{-(k+1)(x-a)^k\cdot k!}{(x-a)^{2k+2}}=(-1)^{k+1}\cdot\frac{(k+1)!}{(x-a)^{k+2}}$$

درستی حدس ما تایید شد.

پاسخ. $y^{(n)}=(-1)^n\cdot\frac{n!}{(x-a)^{n+1}}$.

۳) **راهنمایی.** تابع را به‌صورت $y=2+\frac{3}{x-1}$ بنویسید و شبیه قبل عمل کنید.

پاسخ. $y^{(n)}=(-1)^n\cdot\frac{3\times n!}{(x-1)^{n+1}}$.

کاربردهای مشتق

۸۱. $y'=1+\frac{\cos x}{3\sqrt[3]{\sin^2 x}}$ یا $y'=\frac{3\sqrt[3]{\sin^2 x}+\cos x}{3\sqrt[3]{\sin^2 x}}$ مشتق تابع است و داریم:

$$\lim_{x\to k\pi}\frac{|3\sqrt[3]{\sin^2 x}+\cos x|}{3\sqrt[3]{\sin^2 x}}=\infty$$

یعنی ضریب زاویهٔ مماس بر منحنی در نقطه‌های به طول $x=k\pi$ برابر بی‌نهایت و خود مماس بر محور $x'x$ عمود است.

پاسخ. منحنی در نقطه‌های به طول $x = k\pi$، مماس موازی محور $y'y$ دارد.

۸۲. نقطه‌های برخورد دو منحنی را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{cases} y = -x^۲ + ۲ \\ y = x^۲ \end{cases} \Rightarrow A \left| \begin{matrix} ۱ \\ ۱ \end{matrix} \right. \cdot B \left| \begin{matrix} -۱ \\ ۱ \end{matrix} \right.$$

زاویه بین دو منحنی در نقطهٔ برخورد آن‌ها، به‌معنای زاویهٔ بین مماس‌های بر دو منحنی در نقطهٔ برخورد آن‌هاست. مشتق دو تابع چنین است:

$$y' = -۲x, \quad y' = ۲x$$

بنابراین ضریب زاویهٔ مماس بر منحنی‌ها در نقطهٔ A برابر ۲− و ۲ و در نقطهٔ B برابر ۲ و ۲− می‌شود. زاویهٔ بین دو مماس در نقطهٔ A با زاویهٔ بین دو مماس در نقطهٔ B برابر است. از دستور

$$\tan\alpha = \left| \frac{m - m'}{۱ + mm'} \right|$$

برای محاسبهٔ تانژانت زاویهٔ بین دو مماس استفاده می‌کنیم:

$$\tan\alpha = \left| \frac{۲ + ۲}{۱ + ۲ \times (-۲)} \right| = \frac{۴}{۳}$$

پاسخ. در هر دو نقطهٔ برخورد، منحنی‌ها زاویه‌ای با هم می‌سازند که تانژانت آن برابر $\frac{۴}{۳}$ (برای زاویهٔ حادهٔ بین مماس‌ها) است.

۸۳. مختصات نقطهٔ M را (α, β) می‌گیریم که باید در معادلهٔ منحنی صدق کند:

$$\sqrt[۳]{\alpha^۲} + \sqrt[۳]{\beta^۲} = \sqrt[۳]{۴} \qquad (۱)$$

برای پیدا کردن ضریب زاویهٔ مماس بر منحنی در این نقطه، به y' نیاز داریم. از دو طرف معادلهٔ منحنی، نسبت به x، مشتق می‌گیریم:

$$\frac{۲x}{۳\sqrt[۳]{x^۴}}+\frac{۲yy'}{۲\sqrt[۳]{y^۴}}=۰\Rightarrow y'=-\sqrt[۳]{\frac{y}{x}}$$

بنابراین ضریب زاویهٔ مماس بر منحنی برابر $-\sqrt[۳]{\frac{\beta}{\alpha}}$ می‌شود و می‌توان معادلهٔ مماس را نوشت:

$$y-\beta=-\sqrt[۳]{\frac{\beta}{\alpha}}(x-\alpha) \qquad (۲)$$

این خط راست محور $y'y$ را در نقطهٔ به طول صفر قطع می‌کند. اگر $x=۰$ قرار دهیم عرض نقطهٔ A به‌دست می‌آید:

$$y=\beta+\alpha\sqrt[۳]{\frac{\beta}{\alpha}}=\beta+\sqrt[۳]{\beta\alpha^۲}=\sqrt[۳]{\beta}(\sqrt[۳]{\beta^۲}+\sqrt[۳]{\alpha^۲})=\sqrt[۳]{۴\beta}$$

(از برابری (۱) استفاده کردیم)، بنابراین

$$A(۰,\sqrt[۳]{۴\beta}$$

برای مختصات B، باید در (۲) قرار دهیم $y=۰$ که به‌دست می‌آید:

$$B(\sqrt[۳]{۴\alpha},۰)$$

اکنون می‌توان طول پاره‌خط راست AB را پیدا کرد:

$$|AB|^۲=(۰-\sqrt[۳]{۴\alpha})^۲+(\sqrt[۳]{۴\beta}-۰)^۲=\sqrt[۳]{۱۶\alpha^۲}+\sqrt[۳]{۱۶\beta^۲}$$
$$=\sqrt[۳]{۱۶}(\sqrt[۳]{\alpha^۲}+\sqrt[۳]{\beta^۲})=\sqrt[۳]{۱۶}\cdot\sqrt[۳]{۴}=\sqrt[۳]{۶۴}=۴$$

و درنتیجه $|AB| = ۲$.

پاسخ. از هر نقطهٔ دلخواه منحنی که مماسی بر آن رسم کنیم، همیشه طول قطعه مماس محدود به محورهای مختصات، برابر ۲ می‌شود.

۸۴. اگر طول نقطهٔ تماس منحنی با محور $x'x$ را $x_۰$ بنامیم، $x_۰$ باید y و y' را برابر صفر کند:

$$x_۰^۳ + px_۰ + q = ۰, \quad ۳x_۰^۲ + p = ۰$$

$x_۰$ را از معادلهٔ دوم پیدا می‌کنیم و در معادلهٔ اول قرار می‌دهیم:

$$-\frac{p}{۳}\sqrt{-\frac{p}{۳}} + p\sqrt{-\frac{p}{۳}} + q = ۰ \Rightarrow \frac{۲}{۳}p\sqrt{-\frac{p}{۳}} + q = ۰$$

اگر q را به‌سمت دیگر برابر ببریم و دو طرف را مجذور کنیم، سرانجام به‌دست می‌آید:

$$\left(\frac{p}{۳}\right)^۳ + \left(\frac{q}{۲}\right)^۲ = ۰ \Rightarrow ۴p^۳ + ۲۷q^۲ = ۰$$

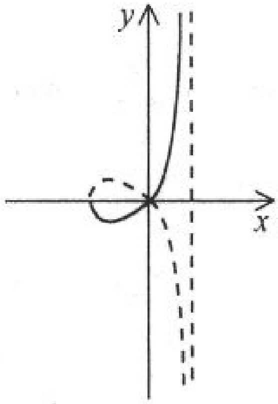
۸۵. ۱) $y' = ۳x^۲ - ۳$ مشتق تابع است که در نقطه‌های ± ۱ تغییر علامت می‌دهد. نمودار در بازه‌های $(-\infty, -۱)$ و $(۱, +\infty)$ صعودی و در بازه $(-۱, ۱)$ نزولی است. منحنی در نقطهٔ $(-۱, ۲)$ به ماکزیمم و در نقطه $(۱, -۲)$ به می‌نیمم خود می‌رسد. نمودار از مبداء مختصات می‌گذرد و در نقطه‌های به طول $x = \pm\sqrt{۳}$ محور $x'x$ را قطع می‌کند. مبداء مختصات نقطهٔ عطف منحنی است (خودتان جدول را تنظیم و نمودار را رسم کنید).

۲) **راهنمایی.** منحنی در بازه‌های $(-\infty, -\sqrt{۲})$ و $(۰, \sqrt{۲})$ نزولی و در بازه‌های $(-\sqrt{۲}, ۰)$ و $(\sqrt{۲}, +\infty)$ صعودی است. $(\sqrt{۲}, -۱)$ و $(-\sqrt{۲}, -۱)$ نقطه‌های می‌نیمم و $(۰, ۳)$ نقطهٔ ماکزیمم تابع است. منحنی

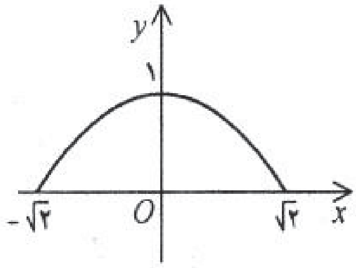
تابع در نقطه‌های به طول ± ۱ و $\pm\sqrt{۳}$ محور $x'x$ و در نقطهٔ به عرض ۳ محور $y'y$ را قطع می‌کند.

۳) باید نمودار $y = x^{۲} + ۳x + ۲$ را برای $x \leq ۰$ و نمودار تابع $y = x^{۲} - ۳x + ۲$ را برای $x > ۰$ رسم کرد.

۴) $y' = \dfrac{-۴x}{\sqrt{۱ - ۴x^{۲}}}$ در نقطهٔ به طول $x = ۰$ برابر صفر و در نقطه‌های به‌طول $x = \pm\frac{۱}{۲}$ برابر بی‌نهایت می‌شود. درضمن، برای دامنهٔ تابع $-\frac{۱}{۲} \leq x \leq \frac{۱}{۲}$. مماس بر منحنی در نقطه‌های $\left(-\frac{۱}{۲}, ۰\right)$ و $\left(\frac{۱}{۲}, ۰\right)$ موازی $y'y$ و در نقطهٔ $(۰, ۱)$ موازی $x'x$ است. نمودار در شکل ۶۸ داده شده است که نیمی از یک بیضی را نشان می‌دهد.



شکل ۶۹



شکل ۶۸

۵) کافی است نمودار تابع $y = x\sqrt{\dfrac{۱+x}{۱-x}}$ را رسم و سپس، قرینهٔ آن را نسبت به محور $x'x$ به آن اضافه کنیم. مشتق تابع به‌صورت

$$y' = \frac{-x^{۲} + x + ۱}{(۱-x)^{۲}\sqrt{\dfrac{۱+x}{۱-x}}}$$

درمی‌آید که به‌ازای $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ صفر می‌شود. ولی دامنهٔ تابع عبارت است از $-1 \leq x < 1$ و تنها $x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ در این بازه قرار دارد. به‌ازای $x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ داریم

$$y = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \cdot \sqrt{\sqrt{5} - 2} \approx 0/3$$

تابع در نقطه‌های به طول ۰ و ۱− محور $x'x$ را قطع می‌کند؛ درضمن

$$\lim_{x \to 1} y = \lim_{x \to 1} x\sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}} = +\infty$$

و این، به‌معنای آن است که با نزدیک شدن x به ۱، نمودار ضمن نزدیک شدن به خط راست $x = 1$ به‌سمت $+\infty$ می‌رود. اگر x را به‌اندازهٔ کافی به ۱ نزدیک کنیم، نمودار رفتاری شبیه خط راست $x = 1$ خواهد داشت.

تابع در بازهٔ $\left[-1, \frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right]$ نزولی و در بازهٔ $\left[\frac{1 - \sqrt{5}}{2}, 1\right)$ صعودی است و در نقطهٔ $\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \frac{1 - \sqrt{5}}{2}\sqrt{\sqrt{5} - 2}\right)$ به می‌نیمم خود می‌رسد. در شکل ۶۹ نمودار تابع با خط کامل داده شده است. همان‌جا نمودار تابع قرینه، یعنی $y = -x\sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}}$ به‌صورت نقطه‌چین رسم شده است.

۶) اگر $x \leq 0$ و $y \leq 0$، آن‌وقت به اتحاد $0 = 0$ می‌رسیم، یعنی مختصات همهٔ نقطه‌های واقع در ربع سوم دستگاه محورهای مختصات، همراه با نیم‌خط‌های راست ox' و oy'، در معادله صدق می‌کند. اگر $x > 0$ و $y > 0$ به معادلهٔ $y = x$ می‌رسیم که باتوجه به شرط مثبت بودن x و y، به‌معنای نیمساز ربع اول دستگاه محورهای مختصات است.

x و y نمی‌توانند علامت‌های مختلفی داشته باشند، زیرا اگر $x < ۰$، آن‌وقت $y + |y| < ۰$، یعنی $y < ۰$.

۷) مشتق تابع به‌صورت $y' = ۲\cos x(\sin x - ۱)$، درمی‌آید. چون تابع متناوب است با دورهٔ تناوب ۲π و کافی است منحنی را در بازهٔ $[۰, ۲\pi]$ رسم کنیم، جواب‌های مشتق را تنها در این فاصله در نظر می‌گیریم:

$$y' = ۰ \Rightarrow x = \frac{\pi}{۲}, \frac{۳\pi}{۲}$$

تابع در بازهٔ $\left[۰, \frac{\pi}{۲}\right]$ و $\left[\frac{۳\pi}{۲}, ۲\pi\right]$ نزولی و برای $\frac{\pi}{۲} \leq x \leq \frac{۳\pi}{۲}$ صعودی است. $\left(\frac{\pi}{۲}, -۱\right)$ نقطهٔ می‌نیمم و $\left(\frac{۳\pi}{۲}, ۳\right)$ نقطهٔ ماکزیمم منحنی است. منحنی در آغاز و انجام خود بر خط راست موازی $y = -۲x$ مماس است. جدول تغییر و منحنی را رسم کنید.

۸) روی جدول، مقدارهای لازم برای رسم نمودار داده شده است. منحنی را خودتان رسم کنید، توجه کنید: منحنی در نقطه‌های $(۰, ۱)$ و $(۲\pi, ۱)$ بر خط راست $y = ۱$ مماس است:

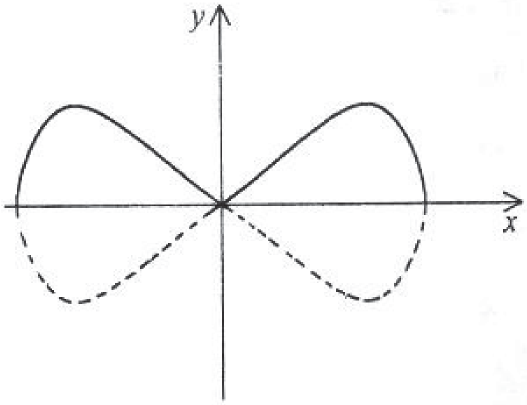
x	۰		α		$\frac{\pi}{۲}$		π		$\frac{۳\pi}{۲}$		$۲\pi - \alpha$		۲π
y'	۰	$-$	۰		$+$		۰		$-$		۰	$+$	
y	۱	$\searrow$	$-\frac{۱}{۸}$	$\nearrow$	۰	$\nearrow$	۳	$\searrow$	۰	$\searrow$	$-\frac{۱}{۸}$	$\nearrow$	۱

α و $۲\pi - \alpha$ از معادلهٔ $\cos x = \frac{۱}{۴}$ مربوط به مشتق به‌دست آمده است و چون $\frac{۱}{۴} < \frac{۱}{۲}$، پس $\frac{\pi}{۳} < \alpha < \frac{\pi}{۲}$. ولی وقتی $x = \alpha$ یا $x = ۲\pi - \alpha$ باشد، به‌معنای این است که $\cos x = \frac{۱}{۴}$. بنابراین، اگر در y به‌جای $\cos x$، عدد $\frac{۱}{۴}$ را قرار دهیم، $-\frac{۱}{۸}$ به‌دست می‌آید که عرض نقطه‌های می‌نیمم است.

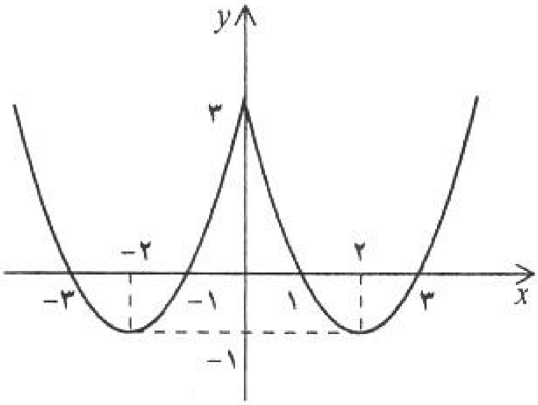
۹) $y=\sqrt{x^۲-x^۴}$ را رسم می‌کنیم و سپس، قرینهٔ آن را نسبت به محور $x'x$ به‌دست می‌آوریم.

$$y'=\frac{۲x-۴x^۳}{۲\sqrt{x^۲-x^۴}};\quad y'=۰\Rightarrow x=۰,\ \pm\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

تابع در بازهٔ $-۱\leq x\leq ۱$ معین است و در نقطه‌های $x=۰$ و $x=\pm\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ به اکسترمم می‌رسد. در نقطه‌های $(-۱,۰)$ و $(۱,۰)$ (آغاز و پایان نمودار)، منحنی بر خط راستی موازی $y'y$ مماس است. منحنی در مبداء مختصات از دو سو بر نیمسازهای ربع اول و دوم مماس است.



شکل ۷۰



شکل ۷۱

در شکل ۷۰ نمودار $y=-\sqrt{x^۲-x^۴}$ به‌صورت نقطه‌چین رسم شده است.

۸۶. ۱) شکل ۷۱ را ببینید. ۲) تابع در فاصله‌های $(-\infty,-۲)$ و $(۰,۲)$ نزولی و در فاصله‌های $(-۲,۰)$ و $(۲,+\infty)$ صعودی است. ۳) $y=۰$ چهار ریشه دارد: ±۱ و ±۳. ۴) داریم:

$$\underset{x\to ۰^-}{\text{حد}}\ y'=۴ \quad \text{و} \quad \underset{x\to ۰^+}{\text{حد}}\ y'=-۴$$

در نقطهٔ $(۰,۳)$، منحنی در سمت چپ بر خط راستی با ضریب زاویهٔ ۴

و در سمت راست بر خط راستی با ضریب زاویه ۴− مماس است. نقطهٔ $(\text{۰}, \text{۳})$ ماکزیمم منحنی است، ولی مشتق در این نقطه نامعین است.

۵) منحنی در نقطه‌های $A(\text{۱}, \text{۰})$، $B(\text{۳}, \text{۰})$، $C(-\text{۱}, \text{۰})$ و $D(-\text{۳}, \text{۰})$ محور $x'x'$ را قطع می‌کند. با قرار دادن طول‌های این نقطه‌ها در مشتق تابع، ضریب زاویهٔ مماس بر منحنی بر هریک از این نقطه‌ها به‌دست می‌آید.

برای نقطهٔ A: $m = -\text{۲}$؛ برای نقطهٔ B: $m = \text{۲}$؛ برای نقطهٔ C: $m = \text{۲}$ و برای نقطهٔ D؛ $m = -\text{۲}$.

مماس در نقطهٔ A با مماس در نقطهٔ D، و مماس در نقطهٔ B با مماس در نقطهٔ C موازی است و بنابراین، چهارضلعی حاصل متوازی‌الاضلاع است. برای این‌که متوازی‌الاضلاع لوزی باشد، باید قطرهای آن بر هم عمود شوند. برای اثبات این مطلب به مختصات راس‌های متوازی‌الاضلاع نیاز داریم که با نوشتن معادلهٔ ضلع‌ها به‌سادگی به‌دست می‌آیند (محاسبه را خودتان ادامه دهید).

۸۷. نقطهٔ تماس را $T\left(x, \frac{x^{\text{۳}} + \text{۲}}{x}\right)$ می‌نامیم. AT خط مماس است و بنابراین ضریب زاویه آن چنین می‌شود:

$$m = \frac{\frac{x^{\text{۳}} + \text{۲}}{x} - a}{x} = \frac{x^{\text{۳}} - ax + \text{۲}}{x^{\text{۲}}}$$

ولی ضریب زاویهٔ مماس برابر است با مشتق (به‌ازای طول نقطهٔ تماس)

$$m = y' = \frac{\text{۲}(x^{\text{۳}} - \text{۱})}{x^{\text{۲}}}$$

درنتیجه طول‌های سه نقطهٔ تماس (اگر وجود داشته باشند)، ریشه‌های این معادله‌اند:

$$x^{\text{۳}} + ax - \text{۴} = \text{۰}$$

در هر معادلهٔ چندجمله‌ای، و از جمله معادلهٔ درجه سوم، مجموع ریشه‌ها برابر $-\frac{b}{a}$ است (در این‌جا a ضریب $x^۳$ و b ضریب $x^۲$)، همچنین حاصل‌ضربِ ریشه‌ها در معادلهٔ درجه سوم برابر $-\frac{d}{a}$ است (d مقدار ثابت معادله است)، پس

$$\alpha+\beta+\gamma=۰\ ,\ \alpha\beta\gamma=۴$$

* **یادداشت.** در معادلهٔ درجه سوم به‌صورت $x^۳+px+q=۰$ ثابت می‌کنند، در حالتی دارای سه جواب حقیقی است که داشته باشیم:

$$۴p^۳+۲۷q^۲=۴(a^۳+۱۰۸)<۰$$

بنابراین به‌ازای $a>-۳\sqrt[۳]{۴}$ تنها یک مماس و به‌ازای $a<-۳\sqrt[۳]{۴}$ سه مماس و به‌ازای $a=-۳\sqrt[۳]{۴}$ دو مماس می‌توان بر منحنی رسم کرد (در حالت اخیر دو مماس منطبق بر هم و یک مماس ساده داریم).

۸۸. پای قائم را $P\left(\alpha,\frac{\alpha-۱}{\alpha+۱}\right)$ می‌گیریم. ضریب زاویهٔ خط قائم (خط راست MP) چنین است:

$$m=\frac{\frac{\alpha-۱}{\alpha+۱}+۲}{\alpha-۲}=\frac{۳\alpha+۱}{(\alpha+۱)(\alpha-۲)}$$

ولی خط قائم بر مماسی که در P بر منحنی رسم شود، عمود است و بنابراین ضریب زاویهٔ قائم عکس قرینهٔ ضریب زاویهٔ مماس در P است. ضریب زاویهٔ مماس در P برابر $\frac{۲}{(\alpha+۱)^۲}$ و بنابراین ضریب زاویهٔ قائم برابر $-\frac{(\alpha+۱)^۲}{۲}$ می‌شود و باید داشته باشیم:

$$\frac{۳\alpha+۱}{(\alpha+۱)(\alpha-۲)}=-\frac{(\alpha+۱)^۲}{۲}\Rightarrow\alpha(\alpha-۱)(\alpha^۲+۲\alpha-۱)=۰$$

چهار نقطه برای پای قائم‌ها به‌دست می‌آید:

$$P_1 \left| \begin{matrix} 0 \\ -1 \end{matrix} \right. , \quad P_2 \left| \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \right. , \quad P_3 \left| \begin{matrix} \sqrt{2}-1 \\ -(\sqrt{2}-1) \end{matrix} \right. , \quad P_4 \left| \begin{matrix} -(\sqrt{2}+1) \\ \sqrt{2}+1 \end{matrix} \right.$$

و معادله خط‌های قائم چنین می‌شود:

$$MP_1 : x + 2y + 2 = 0; \quad MP_2 : 2x + y - 2 = 0;$$
$$MP_3 : x + y = 0; \quad MP_4 : x + y = 0$$

همان‌طور که می‌بینید، دو قائم MP_3 و MP_4، یکی هستند: خط راست $x + y = 0$ (نیمساز ربع‌های دوم و چهارم) منحنی را در دو نقطه قطع می‌کند و در هر دو نقطه قائم بر منحنی است، ولی دو قائم دیگر چنین نیستند. مثلاً قائم MP_1 منحنی را در نقطهٔ $P_1(0, -1)$ و $M\left(-5, \frac{3}{2}\right)$ قطع می‌کند که در نقطهٔ P_1 قائم بر منحنی است و در نقطهٔ M قائم بر منحنی نیست.

۸۹. نقطهٔ اکستره‌مم (ماکزیمم یا می‌نیمم) روی منحنی است و مختصات آن در معادلهٔ منحنی صدق می‌کند. به‌جز آن، طول نقطهٔ اکستره‌مم باید مشتق را برابر صفر کند. از این‌جا، به دو معادله، برای تعیین a و b، می‌رسیم که با حل آن‌ها (به‌صورت دستگاه دو معادلهٔ دومجهولی) به‌دست می‌آید $a = 1$، $b = -2$.

۲) پاسخ. تابع در فاصله‌های $(-\infty, 0)$ و $(1, 2)$ صعودی و در فاصله‌های $(0, 1)$ و $(2, +\infty)$ نزولی است.

۳) پاسخ. کاوی منحنی، در فاصله‌های $x < 0$، $0 < x < \frac{2}{2+\sqrt[4]{2}}$ و $x > \frac{2}{2-\sqrt[4]{2}}$ به‌سوی بالا (به‌سمت yهای مثبت) و در فاصله‌های $\frac{2}{2+\sqrt[4]{2}} < x < 1$ و $1 < x < \frac{2}{2-\sqrt[4]{2}}$ به‌سوی پایین است.

۴) معادلهٔ $\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x^2} = 1$، بعد از ساده کردن، به‌این صورت درمی‌آید:

$$x^4 - 2x^3 - 6x^2 + 16x - 8 = 0$$

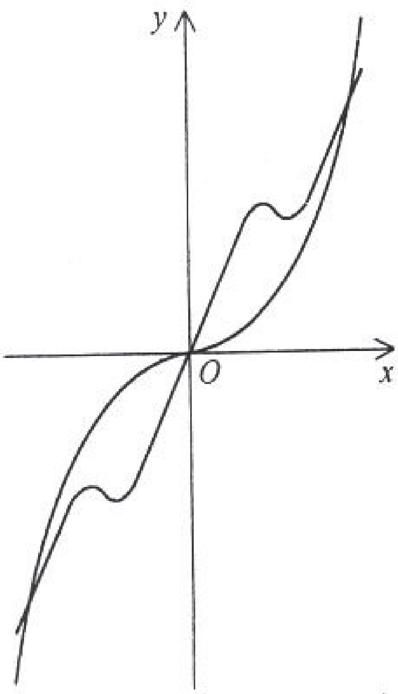
و چون ریشهٔ مضاعفی برابر ۲ دارد، سمت چپ برابری بر $(x-2)^2$ بخش‌پذیر است و چنین می‌شود:

$$(x-2)^2(x^2 + 2x - 2) = 0$$

پاسخ. $x_1 = x_2 = 2$، $x_{3,4} = -1 \pm \sqrt{3}$.

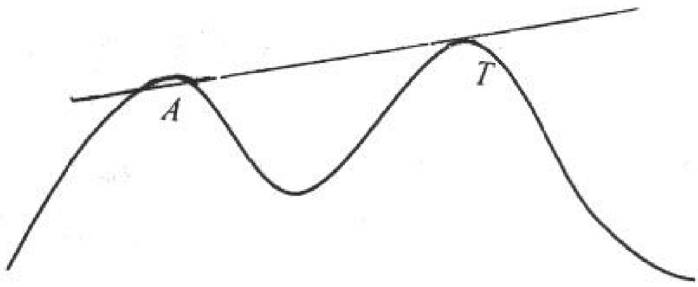
۵) مشتق به‌ازای $x = 2$ برابر صفر می‌شود و به‌ازای $x = 2$ به‌دست می‌آید $y = 1$ (از قبل هم می‌دانستیم که نقطهٔ $(2, 1)$ اکسترمم منحنی است) و معادلهٔ مماس $y = 1$ است.

۹۰. ۱) نمودار هر دو تابع (c) و (c') در یک دستگاه محورهای مختصات رسم شده است (شکل ۷۲).



شکل ۷۲

۲) (c) و (c') تابع‌هایی فرد هستند و بنابراین، مبداء مختصات مرکز تقارن هر دو نمودار است.



شکل ۷۳

۳) مساله نگفته است، خود نقطهٔ A، نقطهٔ تماس است. در حالت کلی، وقتی از A مماسی بر منحنی رسم می‌کنیم، ممکن است خود نقطهٔ A نقطهٔ تماس باشد و ممکن است نقطهٔ دیگری مثل نقطهٔ T نقطه تماس شود (شکل ۷۳). در این حالت، مثل این است از نقطه‌ای واقع در بیرون منحنی مماسی بر آن رسم کرده‌ایم.

طول نقطهٔ تماس را α می‌گیریم. ضریب زاویهٔ مماس برابر $۹\alpha^۲$ می‌شود. ولی این ضریب زاویهٔ خط AT است: $A(۱,۳)$ و $T(\alpha, ۳\alpha^۳)$. پس ضریب زاویهٔ مماس برابر $\frac{۳\alpha^۳ - ۳}{\alpha - ۱}$ یا $۳\alpha^۲ + ۳\alpha + ۳$ می‌شود $(\alpha \neq ۱)$ و باید داشته باشیم:

$$۹\alpha^۲ = ۳\alpha^۲ + ۳\alpha + ۳ \Rightarrow ۲\alpha^۲ - \alpha - ۱ = ۰ \Rightarrow \alpha = ۱, -\frac{۱}{۲}$$

اگر A را نقطهٔ تماس بگیریم، یک خط مماس (با ضریب زاویهٔ برابر ۹) به‌دست می‌آید. ولی از A، مماس دیگری هم به‌طول $-\frac{۱}{۲}$ بر منحنی می‌توان رسم کرد که پیدا کردن عرض این نقطه و سپس معادله مماس دشوار نیست.

۴) خط راستی از نقطهٔ $A(۱,۳)$ با ضریب زاویهٔ m می‌گذرانیم.

$$y = mx - m + ۳$$

نقطه‌های برخورد این خط با $y = ۳x^۳$ از معادلهٔ درجه سوم زیر به‌دست می‌آید:

$$۳x^۳ - mx + m - ۳ = ۰$$

ولی یکی از ریشه‌های این معادله برابر ۱ است (زیرا خط راست را از نقطهٔ A گذراندیم). اگر سمت چپ این معادله را بر $x - ۱$ بخش کنیم، به این معادلهٔ درجه دوم می‌رسیم:

$$۳x^۲ + ۳x - (m - ۳) = ۰ \qquad (*)$$

اگر ریشه‌های این معادله را $x_۱$ و $x_۲$ بگیریم، مختصات نقطه‌های B و C چنین می‌شود:

$$B\left|\begin{array}{l} x_۱ \\ mx_۱ - m + ۳ \end{array}\right. , \quad C\left|\begin{array}{l} x_۲ \\ mx_۲ - m + ۳ \end{array}\right.$$

که از آن‌جا، مختصات نقطهٔ M (وسط پاره‌خط راست BC) به‌دست می‌آید:

$$M\left|\begin{array}{l} x = \dfrac{x_۱ + x_۲}{۲} = \dfrac{-۱}{۲} \\ y = \dfrac{m(x_۱ + x_۲) - ۲m + ۶}{۲} = -\dfrac{۳}{۲}m + ۳ \end{array}\right.$$

ولی m باید چنان باشد که ریشه‌های معادلهٔ $(*)$ حقیقی درآیند (که نقطه‌های B و C وجود داشته باشند). معادلهٔ $(*)$ وقتی ریشه‌های حقیقی دارد که مبین آن نامنفی باشد:

$$\Delta = ۹ + ۱۲(m - ۳) \geq ۰ \Rightarrow m \geq \frac{۹}{۴}$$

یعنی برای عرض نقطهٔ M باید داشته باشیم: $y \leq -\frac{۳}{۸}$. به‌این ترتیب، معادلهٔ مکان نقطهٔ M، با این دستگاه مشخص می‌شود:

$$x = -\frac{۱}{۲}, \quad y \leq -\frac{۳}{۸}$$

مکان، نیم‌خطی است از خط راست $۲x + ۱ = ۰$ که آغاز آن نقطهٔ $\left(-\frac{۱}{۲}, -\frac{۳}{۸}\right)$ است و به‌سمت پایین تا بی‌نهایت ادامه دارد.

۹۱. y را $f(x)$ می‌نامیم و مشتق آن را محاسبه می‌کنیم:

$$f'(x) = (x-b)(x-c) + (x-a)(x-c) + (x-a)(x-b)$$

بدون این‌که به کلی بودن مساله لطمه‌ای وارد شود، می‌توان فرض را بر این گرفت که $a < b < c$. اکنون داریم:

$$f'(b) = (b-a)(b-c) < ۰$$

($b - a > ۰$ و $b - c < ۰$، یعنی حاصل‌ضرب آن‌ها منفی است). $f'(x)$ عبارتی درجه دوم است که در آن، ضریب $x^۲$ (یعنی ۳) عددی است مثبت. اگر $f'(x)$ ریشه‌های موهومی داشته باشد، باید به‌ازای همهٔ مقدارهای x، حاصلی هم‌علامت با ضریب $x^۲$ (یعنی مثبت) پیدا کند، ولی $f'(x)$ به‌ازای $x = b$ منفی شده است، پس $f'(x) = ۰$ دو ریشهٔ حقیقی داردکه یکی از b کوچکتر و دیگری از b بزرگتر است. اگر ریشه‌های $f'(x) = ۰$ را $x_۱$ و $x_۲$ بنامیم، داریم:

$$x_۱ < b < x_۲$$

از طرف دیگر، $f'(a)$ و $f'(c)$ مقدارهایی مثبت می‌شود (چرا؟)، یعنی a و c در بیرون دو ریشهٔ $f'(x) = ۰$ واقع‌اند و درنتیجه:

$$a < x_۱ < b < x_۲ < c$$

$y = f(x)$، همیشه دارای یک ماکزیمم و یک می‌نیمم است: طول نقطهٔ ماکزیمم عددی بین a و b و طول نقطهٔ می‌نیمم عددی بین b و c است.

در حالت $a = b \neq c$، طول نقطهٔ ماکزیمم برابر a و طول نقطهٔ می‌نیمم برابر $\frac{a + ۲c}{۳}$ است (حساب کنید!).

در حالت $a = b = c$، نمودار تابع دارای ماکزیمم و می‌نیمم نیست و نقطهٔ عطفی به‌طول $x = a$ دارد.

۹۲. برای پیدا کردن طول‌های نقطه‌های عطف، باید به مشتق دوم دست یافت:

$$y' = \frac{-۴x(x-۳)}{(x^۲ - ۲x + ۳)^۲} \text{ و } y'' = \frac{۲(۲x^۳ - ۹x^۲ + ۹)}{(x^۲ - ۲x + ۳)^۳}$$

بنابراین طول نقطه‌های عطف، ریشه‌های این معادله‌اند:

$$x^۳ - \frac{۹}{۲}x^۲ + \frac{۹}{۲} = ۰ \qquad (*)$$

این معادلهٔ درجهٔ سوم ریشه‌های گویا ندارد (اگر ریشه گویا داشته باشد، باید یکی از عددهای ± ۱، ± ۳، $\pm \frac{۱}{۲}$، $\pm \frac{۱}{۳}$، ± ۹ یا $\pm \frac{۹}{۲}$ باشد، یعنی بخشیاب‌های $\frac{۹}{۲}$ که هیچ‌کدام مشتق دوم را صفر نمی‌کنند.)

با روش دیگر به سراغ نقطه‌های عطف می‌رویم. مساله گفته است، سه نقطهٔ عطف روی یک خط راست‌اند. معادلهٔ این خط راست را (اگر وجود داشته باشد) $y = ax + b$ می‌گیریم. باید از حل این معادله با معادله منحنی به معادلهٔ درجه سومی برسیم که ریشه‌های آن، طول‌های نقطه‌های عطف

باشد، یعنی به همان معادله $(*)$:

$$\begin{cases} y = \dfrac{x^۲ + ۲x - ۳}{x^۲ - ۲x + ۳} \\ y = ax + b \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ax^۳ - (۲a - b + ۱)x^۲ + (۳a - ۲b - ۲)x + ۳b + ۳ = ۰$$

که با فرض $a \neq ۰$، به این صورت درمی‌آید:

$$x^۳ - \frac{۲a - b + ۱}{a}x^۲ + \frac{۳a - ۲b - ۲}{a}x + \frac{۳b + ۳}{a} = ۰ \qquad (**)$$

برای این‌که ریشه‌های معادله $(**)$ همان ریشه‌های معادله $(*)$ باشد، باتوجه به این‌که در آن‌ها ضریب $x^۳$ برابر است، باید ضریب‌های دیگر هم برابر باشند:

$$\frac{۲a - b + ۱}{a} = \frac{۹}{۲}, \quad ۳a - ۲b - ۲ = ۰, \quad \frac{۳b + ۳}{a} = \frac{۹}{۲}$$

برای دو مجهول a و b، سه معادله داریم. اگر این سه معادله سازگار باشند، یعنی جوابی که از دو معادلهٔ اول به‌دست می‌آید، در معادلهٔ سوم هم صدق کند، به‌معنای این است که فرض ما مبنی بر این‌که سه نقطهٔ عطف روی خط راست $y = ax + b$ قرار دارند، درست است. از دو معادلهٔ اول دستگاه به‌دست می‌آید: $a = \frac{۱}{۲}$ و $b = -\frac{۱}{۴}$. این مقدارهای a و b در معادلهٔ سوم دستگاه صدق می‌کنند. بنابراین خط راست $y = \frac{۱}{۲}x - \frac{۱}{۴}$ به‌واقع از سه نقطهٔ عطف می‌گذرد و این، به‌معنای آن است که نمودار سه نقطهٔ عطف واقع بر یک خط راست دارد.

۹۳. $x_۱$ و $x_۲$ طول‌های نقطه‌های ماکزیمم و می‌نیمم، ریشه‌های $y' = ۰$ هستند، یعنی ریشه‌های معادلهٔ

$$(a + ۲)x^۲ + ۲bx - ۲b = ۰$$

بنابراین $x_1 + x_2 = \frac{-2b}{a+2}$ و $x_1 x_2 = \frac{-2b}{a+2}$.

برای y_1 و y_2 (عرض‌های ماکزیمم و می‌نیمم) می‌توان مقدارهای x_1 و x_2 را در تابع قرار داد. ولی راه‌حل ساده‌تری وجود دارد. خط راستی که موازی $x'x$ از نقطهٔ ماکزیمم یا می‌نیمم بگذرد، بر منحنی مماس است. اگر $y = y$ را چنین خط راستی فرض کنیم، از حل آن به معادلهٔ منحنی به معادلهٔ درجه دوم

$$(y-1)x^2 - (2y+a)x - b = 0$$

می‌رسیم و برای این‌که بر منحنی مماس باشد، باید نسبت به x ریشهٔ مضاعف داشته باشد، یعنی

$$(2y+a)^2 + 4b(y-1) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4y^2 + 4(a+b)y + a^2 - 4b = 0$$

به‌این ترتیب $y_1 + y_2 = -(a+b)$ و $y_1 y_2 = \frac{a^2 - 4b}{4}$. دستگاهی که صورت مساله داده است، چنین می‌شود:

$$\begin{cases} \frac{-4b}{a+2} + \frac{a^2 - 4b}{4} = 19 \\ -(a+b) - \frac{4b}{a+2} = 16 \end{cases}$$

اگر معادلهٔ دوم دستگاه را از معادلهٔ اول آن کم کنیم، به این معادله می‌رسیم:

$$a^2 + 4a - 12 = 0 \Rightarrow a = 2, -6$$

به‌ازای $a = -6$ جوابی برای b به‌دست نمی‌آید. ولی اگر $a = 2$ را در یکی از دو معادلهٔ دستگاه قرار دهیم $b = -9$ به‌دست می‌آید.

پاسخ. $a = ۲$، $b = -۹$.

۹۴. $y = ax + b$ مماس بر منحنی مفروض می‌گیریم. در این صورت باید با حل دستگاه شامل دو معادلهٔ منحنی و خط مماس، به معادله‌ای با ریشهٔ مضاعف برسیم.

$$\begin{cases} y = \dfrac{۲x^۲ + m^۲}{x - ۲m} \\ y = ax + b \end{cases} \Rightarrow (a-۲)x^۲+(b-۲am)x-(m^۲+۲bm) = ۰$$

برای این‌که این معادلهٔ درجه دوم، یک ریشهٔ مضاعف داشته باشد، باید مبین آن برابر صفر شود:

$$(b - ۲am)^۲ + ۴(a - ۲)(m^۲ + ۲bm) = ۰$$

که اگر آن را نسبت به m منظم کنیم:

$$۴(a^۲ + a - ۲)m^۲ - ۴b(۴ - a)m + b^۲ = ۰$$

باید a و b را طوری پیدا کنیم که این برابری نسبت به m به اتحاد تبدیل شود، زیرا در این صورت مقدارهایی که برای a و b به‌دست می‌آید، برای هر مقدار دلخواه $m \neq ۰$ قابل‌قبول‌اند. برای اتحاد بودن این برابری باید داشته باشیم:

$$a^۲ + a - ۲ = ۰, \quad b(۴ - a) = ۰, \quad b^۲ = ۰$$

که از آن‌جا به‌دست می‌آید $a = ۱$ و $b = ۰$ یا $a = -۲$ و $b = ۰$.

پاسخ. خط‌های راست $y = -۲x$ و $y = x$ به‌ازای هر مقدار $m \neq ۰$ بر منحنی مماس‌اند.

۹۵. فرض می‌کنیم از نقطهٔ $M(x_۱, y_۱)$ دو مماس عمود بر هم بر منحنی رسم کرده باشیم. اگر ضریب زاویه مماس‌ها را m فرض کنیم، معادلهٔ خط مماس به‌صورت

$$y = mx - mx_۱ + y_۱$$

درمی‌آید که باید از حل آن با معادلهٔ منحنی، به معادله‌ای با ریشهٔ مضاعف برسیم:

$$\begin{cases} y = x^۲ - ۲x \\ y = mx - mx_۱ + y_۱ \end{cases} \Rightarrow x^۲ - (m+۲)x + mx_۱ - y_۱ = ۰$$

برای این‌که این معادله دو ریشهٔ برابر داشته باشد، باید

$$(m+۲)^۲ - ۴(mx_۱ - y_۱) = ۰ \Rightarrow m^۲ - ۴(x_۱ - ۱)m + ۴y_۱ = ۰$$

دو جواب این معادله، ضریب زاویه‌های مماس‌هایی است که از نقطهٔ M بر منحنی رسم شده‌اند. چون می‌خواهیم دو مماس بر هم عمود باشند، باید دو جوابی که برای m به‌دست می‌آید، عکس قرینهٔ هم باشند، یعنی

$$m_۱ \cdot m_۲ = -۱ \Rightarrow ۴y_۱ = -۱$$

پاسخ. مکان هندسی نقطهٔ M، خط راست $۴y + ۱ = ۰$ است.

۹۶. همهٔ این کسرها را به‌یاری قاعدهٔ هوپیتال رفع ابهام می‌کنیم:

$$۱)\ \lim_{x \to \frac{\pi}{۴}} \frac{\sqrt[۳]{\tan x} - ۱}{۲\sin^۲ x - ۱} = \lim_{x \to \frac{\pi}{۴}} \frac{(\sqrt[۳]{\tan x} - ۱)'}{(۲\sin^۲ x - ۱)'} =$$

$$= \underset{x \to \frac{\pi}{۴}}{\text{حد}} \frac{۱ + \tan^۲ x}{۶ \sin x \cos x \sqrt[۳]{\tan^۲ x}} = \frac{۲}{۳};$$

$$۲)\ \underset{x \to ۰}{\text{حد}} \frac{۳ \tan ۴x - ۱۲ \tan x}{۳ \sin ۴x - ۱۲ \sin x} = \underset{x \to ۰}{\text{حد}} \frac{(۳ \tan ۴x - ۱۲ \tan x)'}{(۳ \sin ۴x - ۱۲ \sin x)'} =$$

$$= \underset{x \to ۰}{\text{حد}} \frac{۱۲(۱ + \tan^۲ ۴x) - ۱۲(۱ + \tan^۲ x)}{۱۲ \cos ۴x - ۱۲ \cos x} =$$

$$= \underset{x \to ۰}{\text{حد}} \frac{\tan^۲ ۴x - \tan^۲ x}{\cos ۴x - \cos x} =$$

$$= \underset{x \to ۰}{\text{حد}} \frac{۸ \tan ۴x(۱ + \tan^۲ ۴x) - ۲ \tan x(۱ + \tan^۲ x)}{- ۴ \sin ۴x + \sin x} =$$

$$= \underset{x \to ۰}{\text{حد}} \frac{۸ \tan ۴x + ۸ \tan^۳ ۴x - ۲ \tan x - ۲ \tan^۳ x}{- ۴ \sin ۴x + \sin x} =$$

$$= \underset{x \to ۰}{\text{حد}} \frac{۳۲(۱ + \tan^۲ ۴x) + ۹۶ \tan^۲ ۴x(۱ + \tan^۲ ۴x)}{- ۱۶ \cos ۴x + \cos x} -$$

$$= - \frac{۲(۱ + \tan^۲ x) + ۶ \tan^۲ x(۱ + \tan^۲ x)}{- ۱۶ \cos ۴x + \cos x} =$$

$$= \frac{۳۲ - ۲}{- ۱۶ + ۱} = -۲$$

$$۳)\ \underset{x \to \sqrt{۳}}{\text{حد}} \frac{x^۴ - ۵x^۳ + ۷x^۲ + ۱۵x - ۳۰}{۲x^۴ + x^۳ - ۳x^۲ - ۳x - ۹} =$$

$$= \underset{x \to \sqrt{۳}}{\text{حد}} \frac{۴x^۳ - ۱۵x^۲ + ۱۴x + ۱۵}{۸x^۳ + ۳x^۲ - ۶x - ۳} =$$

$$= \frac{۱۳\sqrt{۳} - ۱۵}{۳(۳\sqrt{۳} - ۱)} = \frac{۱۷}{۱۴} - \frac{۸}{۲۱}\sqrt{۳}$$

$$۴)\ \underset{x \to ۰}{\text{حد}} \frac{\sin(a + x) \sin(a + ۲x) - \sin^۲ a}{x} =$$

$$= \underset{x \to ۰}{\text{حد}} \frac{\cos(a + x) \sin(a + ۲x) + ۲ \cos(a + ۲x) \sin(a + x)}{۱} =$$

$$= ۳ \sin a \cos a$$

$$۵)\ \lim_{x\to ۰} \frac{\cot(a+۲x)-۲\cot(a+x)+\cot a}{x^۲}=$$

$$=\lim_{x\to ۰}\frac{-۲[۱+\cot^۲(a+۲x)]+۲[۱+\cot^۲(a+x)]}{۲x}=$$

$$=\lim_{x\to ۰}\frac{-\cot^۲(a+۲x)+\cot^۲(a+x)}{x}=$$

$$=\lim_{x\to ۰}\{۴\cot(a+۲x)[۱+\cot^۲(a+۲x)]-$$

$$-۲\cot(a+x)[۱+\cot^۲(a+x)]\}=$$

$$=۲\cot a(۱+\cot^۲ a)$$

۶) پاسخ. $-\frac{۱}{۲}\sin a$.

۷) پاسخ. $\frac{۱}{m}$.   ۸) پاسخ. $\frac{۳}{۲}$ ۹) پاسخ. $\frac{\beta}{m}+\frac{\alpha}{n}$.

۹۷. مجموع طول و عرض زمین برابر m متر است. اگر طول زمین را x متر بگیریم، عرض آن برابر $(m-x)$ متر و مساحت آن

$$S=x(m-x)=-x^۲+mx$$

می‌شود. روشن است که $۰\leq x\leq m$ (در حالت‌های $x=۰$ و $x=m$، به‌جای مستطیل، دو پاره‌خط منطبق بر هم، هریک به‌طول m متر به‌دست می‌آید).

به‌ازای $x=۰$ و $x=m$ به‌دست می‌آید $S=۰$. بنابراین ماکزیمم مساحت به‌ازای جواب مشتق به‌دست می‌آید

$$y'=-۲x+m;\quad y'=۰\Rightarrow x=\frac{m}{۲}$$

بیشترین مساحت زمین وقتی به‌دست می‌آید که آن را به شکل مربع و با ضلع به طول $\frac{m}{۲}$ متر انتخاب کنیم که در این‌صورت، برای مساحت زمین داریم:

$$x = \frac{m}{۲} \cdot \frac{m}{۲} \Rightarrow S = \frac{m^۲}{۴}$$

۹۸. A را به‌سمت راست می‌بریم و معادلهٔ درجه دومی را که به‌دست می‌آید، نسبت به مجهول x منظم می‌کنیم. معادله چنین است:

$$۵x^۲ - ۶(۲y + ۱)x + (۹y^۲ + ۱۴ - A) = ۰$$

برای این‌که این معادله ریشه‌های حقیقی داشته باشد، باید مبین آن نامنفی باشد:

$$\Delta = ۹(۲y + ۱)^۲ - ۵(۹y^۲ + ۱۴ - A) \geq ۰$$

که از آن‌جا نتیجه می‌شود:

$$A \geq \frac{۹y^۲ - ۳۶y + ۶۱}{۵} = \frac{(۳y - ۶)^۲}{۵} + ۵$$

A از مقدار سمت راست برابری کوچکتر نیست. کمترین مقدار سمت راست برابری به‌ازای $y = ۲$ به‌دست می‌آید که در این صورت می‌توان $A = ۵$ گرفت. به‌ازای این مقدارهای A و y به‌دست می‌آید $x = ۳$.

پاسخ. کمترین مقدار عبارت A برابر است با ۵ که به‌ازای $x = ۳$ و $y = ۲$ به‌دست می‌آید.

این مساله را به‌صورت دیگری هم می‌توان حل کرد. A را این‌طور می‌نویسیم:

$$A = (x - ۳)^۲ + (۲x - ۳y)^۲ + ۵$$

و روشن است، برای این‌که A کمترین مقدار خود باشد، باید داشته باشیم:

$$x - ۳ = ۰, \quad ۲x - ۳y = ۰$$

که از آن‌جا $x = ۳$، $y = ۲$ و $A = ۵$.

۹۹. طول ضلع هریک از مربع‌های کوچکی را که از چهار گوشهٔ مربع اصلی درمی‌آوریم، برابر x می‌گیریم (x، ارتفاع جعبه است). طول ضلع قاعدهٔ جعبه برابر $(۱۲۰ - ۲x)$ سانتی‌متر و ارتفاع آن برابر x سانتی‌متر است. بنابراین برای حجم آن به‌دست می‌آید:

$$V = x(۱۲۰ - ۲x)^۲ = ۴x^۳ - ۴۸۰x^۲ + ۱۴۴۰۰x$$

روشن است که $۰ \leq x \leq ۶۰$ و داریم:

$$x = ۰ \Rightarrow V = ۰; \quad x = ۶۰ \Rightarrow V = ۰$$

یعنی به‌ازای $x = ۰$ و $x = ۶۰$، کمترین مقدار حجم به‌دست می‌آید. بیشترین مقدار حجم به‌ازای جواب مشتق است:

$$V' = ۱۲x^۲ - ۹۶۰x + ۱۴۴۰۰$$

ریشه‌های $V' = ۰$ عبارت است از $x = ۶۰$ و $x = ۲۰$. جواب $x = ۶۰$ می‌نیمم حجم را می‌دهد و جواب $x = ۲۰$ ماکزیمم حجم را که برابر است با

$$V - ۱۲۸۰۰۰ \text{ (سانتی‌متر مکعب)}$$

۱۰۰. شعاع قاعدهٔ استوانه را x می‌گیریم؛ مساحت قاعدهٔ استوانه برابر $\pi x^۲$ و بنابراین سطح جانبی استوانه برابر $S - ۲\pi x^۲$ می‌شود. از همین

مقدار سطح جانبی روشن می‌شود که

$$\circ \leq x \leq \sqrt{\frac{S}{۲\pi}}$$

ارتفاع استوانه را می‌توان از تقسیم سطح جانبی آن بر محیط قاعده به‌دست آورد:

$$h = \frac{S - ۲\pi x^{۲}}{۲\pi x}$$

و درنتیجه، برای حجم استوانه خواهیم داشت:

$$V = \pi x^{۲} \times \frac{S - ۲\pi x^{۲}}{۲\pi x} = \frac{۱}{۲}(Sx - ۲\pi x^{۳})$$

V به‌ازای $x = \circ$ و $x = \sqrt{\frac{S}{۲\pi}}$ برابر صفر، یعنی می‌نیمم حجم، می‌شود. بنابراین باید به‌سراغ مشتق V رفت:

$$V' = \frac{۱}{۲}(S - ۶\pi x^{۲});$$

$$V' = \circ \Rightarrow x^{۲} = \frac{S}{۶\pi} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{S}{۶\pi}}$$

و اگر این مقدار x را در رابطهٔ h قرار دهیم، به‌دست می‌آید:

$$h = ۲\sqrt{\frac{S}{۶\pi}} = ۲x$$

یعنی بیشترین مقدار حجم، برای استوانه‌ای است که در آن، ارتفاع با قطر قاعده برابر باشد.

۱۰۱. اگر عرض قاعده را x بگیریم، طول قاعده برابر $2x$ می‌شود و بنابراین، ارتفاع آن برابر است با $y = \frac{V}{2x^2}$. اگر قیمت هر واحد مربع را برای قاعده a و برای دیواره‌های ظرف $3a$ بگیریم، برای ساختن ظرف، به‌اندازهٔ

$$P = 2ax^2 + 18axy + 6ax^2 = 2a(4x^2 + 9xy)$$

هزینه لازم است. $y = \frac{V}{2x^2}$ قرار می‌دهیم. پس از عمل‌های ساده به‌دست می‌آید:

$$P = a \cdot \frac{8x^3 + 9V}{x}, \quad P' = a \cdot \frac{16x^3 - 9V}{x^2}$$

و برای $P' = 0$، خواهیم داشت:

$$P' = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{9V}{2}}$$

و سپس، برای مقدار y

$$y = \frac{V}{2x^2} = \frac{V}{\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{81V^2}{4}}} = \frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{4V}{3}}$$

به‌این ترتیب، با در دست داشتن حجم ظرف، بُعدهای مکعب مستطیل

معین می‌شود. اگر نسبت $\frac{y}{x}$ را محاسبه کنیم:

$$\frac{y}{x} = \frac{\frac{۲}{۳}\sqrt[۳]{\frac{۴V}{۳}}}{\frac{۱}{۲}\sqrt[۳]{\frac{۹V}{۲}}} = \frac{۸}{۹}$$

پاسخ. برای این‌که کمترین هزینه را برای ساختن ظرف داشته باشیم، باید بُعدهای آن را به‌نسبت عددهای ۲ و ۱ و $\frac{۸}{۹}$ در نظر گرفت.